Math. P. 739 w

Mort. 22/90. b.

A. Schimmelpfeng.

Die Raumlehre

oder

die Meßkunst,

gewöhnlich

Geometrie

genannt;

mit

gleichzeitiger Beachtung von Wissenschaft und Leben,

für

Lehrer und Lerner

bearbeitet

von

Dr. Wilhelm Harnisch,

Seminardirector.

Mit sieben Steintafeln.

Zweite verbesserte Auflage.

Breslau,

im Verlage bei Josef Max und Komp.

1837.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

44/3243

Vorwort.

„Ein Pilger, der eine Zeitlang in einer einsamen Hütte gewohnt hatte, knieete des Morgens an der Schwelle seiner Thüre, und verrichtete ein gläubiges Reisegebet, weil er wollte die Welt schauen, die geschaffene und die erlöste. Emsig ging er seines Weges, eifrig spähete er links und rechts, und sah überall Wunder und Zeichen. Da die Sonne sich dem Abende nahete, und er ein Obdach suchte, siehe, so war er wieder bei seiner Hütte! Ein seltsamer Kreisgang hatte ihn dahin zurückgeführt. Es war seine Hütte; aber es schien ihm, als stände sie um einige Fuß höher, als da er auswanderte. Den andern Morgen ging er von Neuem aus und durchspähete Himmel und Erde, forschend und betend, auf seinem Wege, und er kehrte von Neuem heim, ohne daß er es wollte. Und so ging es ihm viele Tage. Zuletzt war es ihm lieb, daß er immer reisen und doch bei sich zu Hause schlafen konnte. Da begegnete ihm ein Mann und sagte: „„Lieber Freund, du wandelst ja stets in Kreisen; du mußst dir mit der Axt einen Weg durchhauen, sonst bleibst du immer an dich selbst gebunden.““ — Aber der Pilger sagte: „„Ich gehe gut auf den Wegen, die Gott gemacht

hat, und will keine für mich einschlagen. Auch scheint es mir so, als käme ich auf den kreisenden Wegen doch viel weiter, als wenn ich über Stokk und Blokk steigen wollte. Mein Haus erhebt sich dabei, und, setze ich noch eine Zeitlang meine Wanderungen fort, so erhöhet es sich so weit, daſs ich von da aus die ganze Welt überschauen kann."" — Dabei blieb der Pilger und fand sich wohl dabei. Die Leute aber, die ihn kannten, nannten ihn den alten Mathematikus oder den Raumlehrer. Jung und Alt hatten ihn sehr lieb; denn er konnte die Sonne nicht allein messen, sondern er war gerade so mild und so gut, wie sie. Als er starb, schienen Himmel und Erde zu trauren; denn sie haben gern ein Auge, worin sie sich spiegeln können, und ein Herz, das ihnen warm entgegen schlägt." —

Vorrede für Sachkundige.

Bei der großen Menge von Lehrbüchern in der Meßkunst halte ich mich für verpflichtet, Rechenschaft davon abzulegen, warum ich, mit den vorhandenen nicht zufrieden, ein neues ausgearbeitet habe. Ich könnte freilich es jedem Lehrer und Gebraucher des Buches überlassen, nachzuforschen, worin dasselbe von den vorhandenen abweiche, und somit ihm selbst meine Rechtfertigung anheim stellen. Allein Mancher will gleich von Vorn herein erfahren das Warum, Wozu und auf welche Art, und die Meisten sind auch nicht in so genauer Kenntniſs von den vorhandenen Lehrbüchern, als daſs sie im Stande wären, vielseitige Vergleichungen anzustellen. Darum halte ich es für zweckdienlich, mich vorn weg über die Eigenthümlichkeit meines Buches auszusprechen, und dies um so mehr, weil sich daraus nicht bloß ergeben kann, daſs ich wohl ein Recht hatte, zu den vorhandenen Lehrbüchern noch eins hinzu zu fügen, sondern weil dadurch auch zugleich gezeigt wird, wie das vorliegende Buch am Besten zu gebrauchen sei.

Da aber hier nur von Lehrbüchern die Rede ist, — von solchen, die nicht die Wissenschaft an sich fördern und weiter bringen, sondern sich im Leben durch Zuziehung von Schülern verbreiten; so gehe ich auch nur auf den Unterricht in der Raumlehre ein, keinesweges auf ihre Ausbildung selbst. — Leider haben wir so gut als gar keine Nachricht über die Art, wie die Aegyptier die Meßkunst lehrten. Ja selbst, wie die Griechen vor Euklides verfuhren, das liegt nicht so klar zu Tage, wie man es wohl wünschen möchte. Doch läßt sich, nach meiner Meinung, annehmen, daß bei der großen Regsamkeit der Griechen und bei den ausgezeichneten Gaben vieler ihrer Weisen die Raumlehre von ihnen auf eine geistige, bildende und erwekkende Weise behandelt ward, so daß der Schüler sich selbst hineinarbeitete, und der Lehrer nur bei seiner meßkünstlerischen Menschwerdung Hebammendienste verrichtete. — Ganz anders war dagegen die Lehrart, die in dieser Wissenschaft auf den hohen und gelehrten Schulen bei uns herrschte und theilweis noch herrscht. Man folgte dem Euklides oder irgend einem andern verwandten Handbuche, fing damit an, den Schülern zu erklären, was die Raumlehre sei, gab ihre Eintheilung an, entwikkelte die wichtigsten vorkommenden Begriffe, als: Winkel, Strich, Dreiekk, Vierekk, Kreis u. s. w., fügte dem einige Sätze bei, die sich von selbst verstanden, z. B. „zwei grade Striche können sich nur in einem Punkte durchschneiden," und ging dann zu Sätzen über, welche der Lehrer dem Schüler bewies, so daß der Schüler bei dem ganzen Unterricht nur ein Zuhörer war, aber kein Zuthuer, nur die Weis-

heit des Lehrers auffassen und bewahren, aber keine eigne, aus selbstständiger Wurzel treiben konnte. Dabei hatte man die Wissenschaft so rein weg vom Leben abgeschnitten, dass der Schüler Jahre lang fleißig arbeiten konnte, ohne doch irgend wie zu sehen, wozu ihn denn sein Fleiß führe, und was das denn eigentlich sei, womit er sich beschäftigte. Kam er endlich zur angewandten Raumlehre, die man ganz hinten an stellte, so war er so ungeschikkt in dem Gebrauch von Passer (Zirkel) und Richtscheit (Lineal), und der Lehrer gewöhnlich in gleichem Maaße, dass beide sich nur damit beschäftigen konnten, wie so etwas zu machen sei, ohne es selbst zu machen. So blieb denn auch die angewandte Raumlehre in den Aesten dürrer Begriffe hangen, und mancher Schüler, der die ganze Raumlehre in der Schule fleißig durchgemacht hatte, war nicht im Stande, eine grade Richtung auf dem Felde einzuschlagen, oder einen Garten in den Grund zu legen. Zum verwundern war es übrigens nicht, wenn aus einer Schülerabtheilung von zwanzig bis dreißig nur zwei bis drei würklich dem Lehrer folgten, während die andern reinweg müßig saßen und weiter nichts von diesem Gegenstande erhielten, als einen gründlichen Ekel davor, wodurch sie oft, bei ausgezeichneten Anlagen für dies Fach, auf immer davon geschieden waren. So etwas hätte wohl die Lehrer auf den Weg aufmerksam machen sollen; allein man war, wie das ja so oft der Fall ist, davon überzeugt, dass das, was sei, auch gut sei; und so beging man denn die Thorheit, zu wähnen: „es hätten nur wenige Leute Sinn für die Raumlehre;" was doch eigentlich heißt: „sie hätten Augen und sähen nicht."

Zu den fremden Sprachen musste und sollte Jeder Geschikk haben, aber zur Raumlehre nicht. Viele hundert Gelehrte nahmen aus der Schule diesen Glauben mit ins Grab: „sie hätten keinen Sinn für die Raumlehre;" während ihnen weiter nichts abging, als der Sinn für eine ganz ausgedörrte Wissenschaft, die sich im Leben und in Frische nie sahen, und die sie würde außerordentlich angezogen haben. Beiläufig musste natürlich auch der Gedanke herrschend werden, die Raumlehre, wie überhaupt die Größenlehre (Mathematik), sei eine gewaltig schwere Sache, zu deren Auffassung eine scharfe Denkkraft gehöre; und so hielt man denn das erst fast erwachsenen Leuten zugänglich, was das Auge der wenig denkenden Kinder schon ersehen, und ihre kleinen Hände schon erschaffen können.

Es soll hiermit keinesweges geleugnet werden, dass mehrere Lehrer schon einen bessern Weg einschlugen; sie ließen Manches die Schüler selbst aufsuchen, regten durch Fragen an, erlaubten es nicht gleich jedem, müßig zu sitzen, der erklärte, er habe keine Anlagen zur Größenlehre, und gebrauchten auch wohl Richtscheit und Zirkel in der That, und nicht zum bloßen Schein. Vorzüglich kam durch die Philanthropen die angewandte Größenlehre mehr in Aufnahme; man ging auf das Feld, um einige Mesübungen anzustellen, und brachte so mehr Leben in diesen Unterrichtsgegenstand. Allein das Alles war nicht genügend, und fand auch nur in den wenigsten Schulen Eingang.

Die Bildung der Landmesser und der Bauleute dagegen wurde auf einem ganz andern Wege erzielt.

Denn ehe man besondere Bauschulen und höhere Lehranstalten für das Baufach errichtete, lernte der Jünger bei dem Meister, wie dies bei Handwerkern noch jetzt der Fall ist. Da ward denn der Schüler gleich ins Leben geführt; er lernte messen, auftragen, berechnen u. s. w., ohne die Gründe und Regeln zu erfahren. Späterhin unterrichtete ihn wohl der Meister etwas darin, oder gab ihm Bücher in die Hände. An Schikk und Blikk fehlte es solchen durch das Leben gebildeten Leuten nicht, und die größten Stubengelehrten mussten oft vor ihnen die Seegel streichen, wenn es sich um Ausführungen handelte, während sie in der hohen Weisheit stekkten.

So fand sich denn auch hier, und findet sich noch heut zu Tage, die unglükkliche Trennung von Wissenschaft und Leben, so dass die eine wenig auf das andere achtet, statt dass beide wechselweis sich durchdringen sollten, damit eins das andre förderte. Während der, welcher die Raumlehre zu seinem Broderwerb benutzt, nur das von ihr erlernt, was geraden Weges zum Brode führt, so erlernt der andere, der sie zu seiner innern Bildung betreibt, nur ihre Begriffe und Urtheile, ohne selbst an ihr inneres Leben zu kommen. Und weil Wenige in diese bloßen Begriffe, Urtheile und Schlüsse eindringen; so ist die Größenlehre uns gar nicht mehr das, wofür sie Plato hielt: der Eingang zur Weisheit. Mathematik und Trokkenheit, ein Mathematiker und ein dürrer Verstandesmensch — das liegt so nahe an einander, dass man beides mit einander verwechselt. Man durchgehe die Schulen der

Weisheit in ganz Deutschland, die Hochschulen (Universitäten), man schaue in die gelehrten Schulen (Gymnasien), wird man da viele Anhänger der Größenlehre finden? Die Lehrsäle stehen leer, und wenn auch die Schulbänke gefüllt sind, so merkt man doch bald, dass viele darauf nur einen Sitz, keine Stimme haben. Die Hauptursache davon liegt aber nicht einseitig in der angegebnen Trennung von Wissenschaft und Leben, sondern eigentlich tiefer. Sie liegt darin, dass unsere Mathematiker eben so, wie unsere meisten Naturforscher, keinen bildenden Sinn, kein pädagogisches Streben haben. Ihre bloß wissenschaftliche Richtung schneidet sie mit jedem Schritt mehr vom Leben, sie drehen sich nur auf den einzelnen Spitzen der ausgearbeiteten Wissenschaften herum, um an diesen Grenzen neue Eroberungen zu machen und so die Wissenschaft auszudehnen. Das große Reich selbst, worin sie als Könige herrschen könnten, das achten sie weiter nicht, da mag es bunt zugehen, da mag ein Bewohner nach dem andern aussterben, ohne dass sein Platz besetzt wird. Sie gleichen den Fürsten, die ihren Staat vernachlässigen, um neue Länder in fernen Gegenden zu erobern, die ihre Hofhaltung nie im Mitten des Reichs, sondern stets an den Grenzen haben. Ein guter Naturforscher und ein guter Mathematiker darf nicht an den Grenzen hoflagern, sondern im Mitten des Reiches, und dieses ausdehnen durch innerliche Stärkung, Bevölkerung und Belebung. Es kann würklich Keiner mehr für die Wissenschaften selbst thun, als wenn er tüchtige Schüler bildet, in denen der Forschungstrieb angeregt ist. Ein Lehrer, der solche

tüchtige Schüler angezogen hat, gleicht einem Wesen mit vielen Sinnen und Gliedern. Er hat z. B. so viel Mal zwei Augen und zwei Hände, als er tüchtige Schüler zog. Lehrer an hohen und gelehrten Schulen sind besonders als Lehrer zur Ziehung von Schülern verpflichtet. Allein der Mathematiker und der Naturforscher bildet keine Schüler durch bloßes Einpfropfen des Vorhandenen, nur Erregung des Forscherblikkes und Begeisterung für das Fach, das bildet Schüler. Was Andere geleistet, und was überhaupt in einer Wissenschaft vorhanden ist, das kann man auch durch Bücher erfahren; allein wie man einer Wissenschaft wahrhaft nachgehen, und wie man sie innig lieben soll, das kann am besten ein Lehrer nicht vorlesen, sondern vorleben.

Woher kommt es, daſs die Philologie ein großes Uebergewicht über alle Wissenschaften hat, die zur allgemeinen Ausbildung gehören, namentlich über Naturwissenschaften und Mathematik? Ist sie weniger trokken? Ich glaube mehr. Aber der Philolog sucht Jüngerschaft und bildet sie. Von Heyne's, Wolf's, Hermann's und Anderer Schüler spricht man überall. Auch Philosophen und Geschichtslehrer pflegen wohl eine begeisterte Jüngerschaft um sich zu bilden, und nur die Philosophen und die Geschichtslehrer richten etwas aus, welche eine Jüngerschaft um sich versammeln. Alles Lernen, wenn es würklich in Fleisch und Blut übergehen soll, kann der Liebe und der Lust so wenig entbehren, als die Pflanzen zu ihrem Wachsthum der Sonne. — Klagen darum unsere Mathematiker und Naturforscher

über Mangel an Sinn für ihre Wissenschaft, so klagen sie sich selbst an; denn des Lehrers erste Pflicht ist: Erwekkung des Sinnes für eine Wissenschaft. Daſs jetzt Naturwissenschaften und Mathematik so wenig getrieben werden, obgleich sie dieselbe Wichtigkeit für die Bildung haben, als Geschichte und Sprachforschung, davon werden die Rechenschaft abzulegen haben, die vor aller Gelehrsamkeit nicht zur Bildung von Schülern kommen können, und denen eine neue Pflanze oder ein neues Thier wichtiger ist, als eine Masse von hundert Schülern, die wohl lernen möchten, wenn sie nur die rechte Gelegenheit dazu hätten. Wie man ein Gebäude nicht hoch ausbauen kann, wenn man keinen breiten Grund legt, so auch kann man die Naturwissenschaften und die Mathematik nur hoch ausbauen, wenn man den Grund, nicht in wenig Neues suchenden Forschern, sondern in vielen Verehrern des Daseienden legt, und den Sinn zu Forschungen in allen Ständen des Lebens erwekkt. Will man aber dies, so muſs der Unterricht in diesen Fächern, und namentlich also auch der in der Raumlehre, die uns hier nur was angeht, eine ganz andere Gestalt annehmen, als er bisher hatte; er ist nicht allein anders zu betreiben, sondern auch noch in andern Anstalten, als bisher. Nicht allein auf den Hochschulen, in den gelehrten Schulen und in den Privatanstalten ist die Raumlehre zu behandeln, sondern auch in die Volksschulen muſs dieser Unterricht hinein, die kleinern Kinder müssen schon zur Raumlehre geführt werden. —

Die Versuche sind auch gemacht; doch wer etwas Neues versucht, erhält nicht gleich das Rechte. Dies

sei im Voraus gesagt, wenn wir jetzt einen Blikk auf diese Versuche werfen wollen. Pestalozzi war der erste, der diese Versuche machte. Sein Nachdenken über Erziehung brachte ihn darauf, daſs auch die Form einen wesentlichen Theil des Bildungsstoffes ausmache, und aus dieser Ueberzeugung gingen die Maaßverhältnisse hervor, von deren Miſsbrauch ich gar nicht reden will, die aber selbst bei dem besten Gebrauch zu nichts führen konnten. Allein aus unvollkommenen Anfängen wird doch oft was Vollkommenes. Die Pestalozzischen Maaßverhältnisse haben den Anstoß zu einer bessern Bearbeitung der Raumlehre gegeben. Durch sie wurden viele Lehrer zu diesem Gegenstand geführt, die wenig davon wußten, und die durch eigne Kraft sich suchten eine Bahn zu brechen. Hierzu gehört vor allen Josef Schmid, dessen Form- und Größenlehre wohl hinlänglich bekannt ist. Von ihr muſs ich dasselbe sagen, was von Pestalozzi's Maaßverhältnissen gilt; sie war an sich wenig, aber sie führte zu Vielem. Sie war wenig, weil sie nur einen kleinen Theil der Raumlehre selbst umspannte, ohne innere Gesetze eine übergroße Masse lieferte, und für das bürgerliche Leben keine Bedeutung hatte. Sie war viel, denn sie bekümmerte sich nicht um den ausgefahrenen schlechten Weg, dessen Unzwekkmäßigkeit wegen der Gewohnheit Keiner sah; sie ging vom Schüler aus und nicht von der Wissensmasse, und beabsichtigte Kraftbildung — etwas ganz Neues in der Zeit. Mehrere Lehrbücher sind, ohne große besondere Eigenthümlichkeiten, der Josef Schmidschen Formen- und Größenlehre gefolgt, die wir hier übergehn. Durch

sie, und mehr noch durch Josef Schmid's Schüler, die sich von Ifferten aus weit verbreiteten, wurde der neue Unterricht in der Raumlehre in viele Schulen gebracht, bei vielen Schülern angewandt. Die Sache ward mit Eifer und mit Liebe getrieben; Pestalozzi bildete unter den Erziehern eine Schule, und so übersah denn Mancher im Eifer alle die Mängel, welche ein Unterricht nothwendig an sich tragen musste, der von einem Jüngling herrührte, dem, bei vielen Anlagen, und bei großem Eifer, doch die nothwendigsten Kenntnisse damals abgingen. Die Leute, welche in keiner Lage zu einem eignen Leben kommen, sondern die überall nur das des Andern wiedergeben können, die nahmen unbedingt den Josef Schmid an und lehrten und lehren noch darnach. Das war denn freilich oft zum Erbarmen, zumal wenn man es so in die Dorfschulen einführte; und man konnte es den kundigen Männern in der Raumlehre nicht ganz verdenken, wenn sie ein Verdammungsurtheil über dieses wirrige Liniencombinationen-Treiben aussprachen. Es war eine eitle Kraft-Anstrengung, ohne Zwekk, ohne Ziel, ohne Beziehung zur Wissenschaft und zum Leben, ein wahrer deus ex machina. Allein die wahren Anhänger Pestalozzi's, d. h. die, welche nie seine äußere Hülle, seine Unterrichtsformen verehrt haben, sondern überall nur seinen Geist anerkannten, und die oft seine Formen zerbrachen, um seinen Geist in die Welt zu führen, der von kurzsichtigen Schülern und Anbetern zu verschiedenen Zeiten in gar mannigfaltige Zwangsformen geschlagen ward, diese sahen das Gute, was in Josef Schmid's Formen- und Größenlehre lag; blieben aber dabei nicht

stehen, sondern baueten weiter. Zu diesen Männern rechne ich, und als den ersten, meinen unvergeßlichen Freund Friedrich Friesen*), der beim deutschen Freiheitskriege in den Ardennen fiel. Er schlug von 1809 bis 12, in der Plamann'schen Anstalt in Berlin, da man in Iffer-ten in der Schweiz unter Pestalozzi noch unbedingt Josef Schmid folgte, einen Unterrichtsweg in der Raumlehre ein, der, gleich dem Weg von Josef Schmid, wahre Kraft erwekkte, gleich dem Weg, den Euklides nahm, zur richtigen Einsicht in die wesentlichsten Raumverhältnisse führte, und, gleich dem Weg, den die Feldmesser betreten, zur Ausübung der Kunst leitete. Ihm war dies möglich; denn selbst ein geschikkter Feldmesser und Kartenzeichner, besaß er tiefe Einsichten in die Raumlehre, und hatte als Erzieher und Lehrer einen feinen Takt. Ich, der ich früherhin mit einigem Eifer in der Schule die Raumlehre getrieben hatte, wurde bald von diesem Gange angesprochen; doch konnte ich ihn nur auf kurze Zeit, selbst als Lehrer in der Plamann'schen Anstalt, der ich von 1810 bis 12 angehörte, versuchen. Seit 1812 habe ich in diesem Gegenstande eigentlich nicht unterrichtet; jedoch mich stets aus besonderer Vorliebe um denselben bekümmert. Die Ausbildung der Uebungen der Anschauung veranlaßten mich auch noch besonders dazu, ich machte selbst alle Körper der Raumlehre, und einige, die ich in der Kristallkunde näher kennen lernte. Der Umgang mit meinem lieben Freunde,

---

*) Man lese über ihn: Erziehungs- und Schulrath, 5tes Heft, S. 108!

dem Herrn Bergrath und Professor Carl von Raumer, gerade zu der Zeit, da er sein ABC der Kristallkunde ausarbeitete, erweiterte in mir die Ideen, welche durch meinen seligen Freund Friesen, in Absicht der Bearbeitung der Raumlehre, in mir entstanden waren, und so trat von Tage zu Tage mir immer lebhafter das Bild von einem wohlgeordneten Unterricht in diesem Gegenstande entgegen. Weil ich aber selbst anderweitig beschäftigt war, so veranlasste ich zwei meiner Freunde und ehemaligen Schüler, die Herren Sauermann (jetzt meinen Amtsgenossen)*) und Fischer (jetzt Lehrer am Seminar zu Neu-Zelle)**), diesen Gegenstand prüfend zu verfolgen, und deshalb darin zu unterrichten. Dies konnte um so erfolgreicher sein, da ersterer sich vorzüglich mit der Kristallkunde, letzterer aber mit den höhern Gebieten der Größenlehre (Mathemathik) bekannt gemacht hatte. In gemeinsamen Zusammenkünften wurde über das Erfahrne und das Zuprüfende Manches durchgesprochen. Unterdess erschien der Versuch eines ABC-Buchs der Kristallkunde, von Karl von Raumer, welche ich sogleich durchging, um zu sehn, was er für den Unterricht in der Raumlehre darbieten möchte. — Nachdem ich dieses gethan, ging ich

*) Spätere Anmerkung. Er ist schon heimgegangen. Herausgegeben hat er in diesem Fach: Formenlehre, Breslau 1833.

**) Spätere Anmerkung. Es ist dies der Umarbeiter von Hellmuths Naturlehre, und der Herausgeber der Gift-, Arznei- und Futtergewächse Deutschlands. Neu-Zelle 1827, so wie des Textes zu den höchst brauchbaren, bei Pelz in Breslau erschienenen, Wandtafeln zur Naturgeschichte.

noch ein Mal die Lehrbücher durch, welche nach Josef Schmid für den Unterricht in der Raumlehre erschienen sind; allein ich fand, dass sie alle meinen Anforderungen nicht genügten, und deshalb fasste ich endlich den Entschluss, selbst Hand ans Werk zu legen, und übernahm zu diesem Behuf den Unterricht in der Raumlehre bei ganz kleinen Kindern, damit ich lehrend ein Lehrbuch schriebe.*) Ich hatte eine gewisse Scheu davor, selbst Hand anzulegen, da ich fühlte, wie viel mir in der Größenlehre abginge, und wie viel ich noch lernen müsste, um mich zu denen rechnen zu können, die würklich in der Größenlehre vollständig bewandert sind. Darum veranlasste ich noch früherhin meinen Freund, den Herrn Direktor Kawerau, im Erziehungs- und Schulrath, diesen Gegenstand zu bearbeiten. Er machte auch den Anfang damit; doch schien es mir, als wenn der von ihm eingeschlagene Weg nicht sich genug von Josef Schmid entfernte, und das Verstummen des Erziehungs- und Schulrathes unterbrach diese Arbeit. Weil Herr Brettner**) die Gedanken, welche durch die Herren von Raumer und Sauermann, in Absicht der Körperlehre (Stereometrie), in ihm erwekkt waren, so umfassend in den Bunzlauer Anstalten ausgeführt

*) Mitten unter der Arbeit ward ich durch den Tod eines Amtsgenossen veranlasst, den Unterricht in der Raumlehre im evangelischen Seminar in Breslau auf einige Monate zu übernehmen.

**) Spätere Anmerkung. Derselbe hat einen recht brauchbaren Leitfaden für den Unterricht in der Physik herausgegeben, der 1828 erschien und 1836 bereits zum fünftenmal wieder aufgelegt ward. Breslau bei J. Max und Comp.

hatte; so forderte ich auch diesen auf, einen zweckmäßigen Leitfaden zum Unterricht in der Raumlehre für Volksschullehrer auszuarbeiten; doch dieser lehnte es aus Bescheidenheit ab, und schien auch mehr von wissenschaftlicher Seite den Gegenstand aufzufassen, als von Seiten der Schule.

So erscheint denn hier nun ein unvollkommnes Werk von mir, das bei weitem dem Bilde nachsteht, das ich mir selbst davon zu Anfang entworfen hatte. Mögen Andere dadurch angetrieben werden, etwas Besseres zu liefern, so daſs es auf diese Art ein Mittelglied in einer fortschreitenden Kette wird! Zu dieser Kette rechne ich als Mittelglieder zwischen dem Josef Schmidschen Buch und dem vorliegenden vorzüglich folgende, die ich auch größtentheils mehr oder weniger benutzt*) habe, und die in vielen Hinsichten das meinige bei weitem übertreffen, aber nicht darauf berechnet sind, worauf ich gerade mein Buch berechnet habe:

*Raumlehre für Volksschulen. Von J. G. Graßmann, Subrektor am Gymn. zu Stettin. Erster Theil. Ebene räumliche Verbindungslehre. Mit 3 Kpfrn. Berlin 1817. In der Realschulbuchhandlung. (12 Gr.)

*Geometrische Constructions-Lehre für Lehrer und Lernende. Ein Versuch geometrischer Geistes-Gymna-

*) Die mit einem Stern bezeichnet sind, habe ich benutzt, die andern nicht. Ich behaupte keinesweges, daſs die von mir benutzten sich vor den andern überall auszeichnen.

stik, von J. F. Ladomus. Erster Theil. Freiburg und Konstanz, in der Herderschen Buchhandlung, 1812. Zweiter Theil, Karlsruhe 1817, bei Marx. (2 Thlr. 12 Gr.)

*Von Türks Leitfaden zur Behandlung des Unterrichts in der Form- und Größenlehre. Berlin und Leipzig, bei Köhler, 1817. (1 Thlr. 21 Gr.)

*Lehrbuch über die vornehmsten Aufgaben aus der Ebenen- und Körper-Geometrie, nebst den dazu gehörenden Beweisen und Erklärungen für Schulen und zum Selbstunterrichte, von Dr. Gelpke. Leipzig, bei Gerhard Fleischer dem Jüngern, 1818. (1 Thlr. 12 Gr.) [gut.]

*Hoffmann's geometrische Anschauungslehre. Eine Vorbereitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie, mit 7 Steintafeln, 2te Auflage. Mainz, bei Kupferberg, 1817. (15 Gr.)

*Dessen geometrische Wissenschaftslehre. Eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometri. Daselbst 1816. (20 Gr.) [Beide etwas oberflächlich hinstreifend.]

Häule, die Geometrie als Geistes-Gymnastik. Erster Theil. Hadamar 1817. (12 Gr.)

*Mathias Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Größenlehre. Mit 2 Kpftn. 2te Auflage. Magdeburg 1818, bei Heinrichshofen. (16 Gr.) — [Der 2te Theil der Erläuterungen zu diesem Leitfaden, in 3 Theilen abgefaßt, und herausgekommen 1815 (2 Thlr. 12 Gr.) enthält die Geometrie.]

* Mathematik für den ersten wissenschaftlichen Unterricht, systematisch entworfen von F. Schweins. 2ter Theil. Geometrie. Darmstadt und Gießen, bei Heier, 1810. (1 Thlr. 8 Gr.)

Außer diesen Lehrbüchern setze ich noch folgende hierher, die in mancher Hinsicht sich sehr empfehlen:

* Versuch einer praktischen Elementar-Geometrie, für Schulen und zum Selbstunterricht, mit beigedrukkten Figuren. Von Schmieder. Halle, bei Joh. Ch. Hendel, 1810. (16 Gr.)

* Die Hauptlehren der Geometrie und Trigonometrie, vollständig dargestellt als Leitfaden zum Unterricht für zwei verschiedne Lehrkurse auf Schulen und Universitäten, von H. W. Brandes. Mit 9 Kpfrn. Oldenb. in der Schulzeschen Buchhandl. 1816. (2 Thlr. 2 Gr.)

* Die ersten Anfangsgründe der Geometrie, als Stoff zu Denk- und Sprachübungen benutzt. Von Dr. Pöhlmann. 3 Bdchn. Erlangen, bei Palm, 1815. (4 Thlr.)

[Furchtbar weitläuftig und für einen denkenden Lehrer deshalb wenig brauchbar. Der 3te Theil hat darum Werth, weil dazu eine wohleingerichtete Körpersammlung für 5 Thlr. sächsisch zu haben ist.]

* Anfangsgründe der Geometrie. Als Anleitung zu einem gründlichen Studium der Mathematik bearbeitet von Zimmermann. 2te Aufl. Mit 8 Kupfern. Berlin 1813, bei Müller. (1 Thlr. 8 Gr.) [sehr gut.]

* Lehrbuch der reinen Mathematik, für den Selbstunterricht, von Streit. 8 Theile. Weimar, im

Landes-Industrie-Comptoir. (9 Thlr.) [Die drei letzten Theile beschäftigen sich mit der Geometrie.]

Gütle's ökonomische Meßkunst, ein einfacher Unterricht im Feldmessen für junge Leute, die sich selbst üben wollen. Ulm, bei Ebner. (1 Thlr. 6 Gr.)

Zimmermann's Grundriß der reinen Mathematik, für diejenigen, welche diese Wissenschaft zu irgend einem Zwekke des bürgerlichen Lebens benutzen wollen. 2 Theile. Mit Kupfern. 8. Berlin, bei Nikolai, 1818. (4 Thlr. 12 Gr.)

*J. J. Ebert, Anfangsgründe der nothwendigsten Theile der reinen Mathematik. Mit 12 Kpfrn. 4te Aufl. Leipzig, bei Härtel, 1820. (1 Thlr.)

*Der selbst lehrende Geometer, oder deutliche Anweisung zur Meßkunst, worin sowohl die eigentliche Geometrie, als auch die ebene und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Nivelliren und Landmessen enthalten ist. Von Abel Bürja. 2 Th. 2te Aufl. Berlin, bei Lagarde, 1801. (3 Thlr. 12 Gr.)

*Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, von J. T. Mayer. 4 Th. mit Kpfrn. Göttingen, im Verlage der Wittwe Vandenhök, 1777 bis 94. (7 Thlr. 12 Gr.)

Blasche, Grundriß der Elementar-Geometrie, nach der Methode der Alten entworfen. Mit 12 Kpfrn. Riga, bei Hartmann, 1821. (1 Thlr. 12 Gr.)

Lehmus, Sammlung von Beispielen, Aufgaben und Lehrsätzen aus der Arithmetik, Algebra, Geometrie und

ebenen Trigonometrie. Mit 6 Kpfrn. Berlin, bei Reimer, 1821. (22 Gr.)

Poppe's Lehrbuch der reinen angewandten Mathematik. 1ster Bd. 2te Aufl. Frankfurt am Main, bei Herrmann, 1821. (2 Thlr.)

Vieth's Anfangsgründe der Mathematik. 1. bis 4. Th. Leipz. bei Ambr. Barth, 1821. (4 Thlr. 20 Gr.)

Dessen erster Unterricht in der Mathematik für Bürgerschulen, 5te vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig bei A. Barth, 1821. (1 Thlr. 4 Gr.)

* Gründliche Anleitung zu geschikkter Führung des Zirkels, Lineals und Dreiekkes. Für Schulen und zum Selbstunterricht verfasst von Nilson. Augsburg, 1803, in der akademischen Kunsthandlung. (2 Thlr. 6 Gr.)

* Anfangsgründe der reinen Mathematik, zum Leitfaden seiner Vorlesungen entworfen, von Dr. J. J. A. Ide. 2. Th. Geometrie. Berlin, bei Heinrich Fröhlich, 1803. (1 Thlr. 12 Gr.) *)

Jeder Lehrer, der sich weiter und vielseitiger noch, als das durch vorliegendes Buch geschehen kann, in der Raumlehre auszubilden wünscht, findet in diesen Büchern sogleich die Mittel, und kann sich solche auswählen, die seinem Bedürfnisse am besten zu genügen scheinen. Karl v. Raumers Versuch eines ABC-Buches der Kristallkunde, Berlin, bei Reimer 1821 (1 Thlr. 16 Gr.), konnte ich weder in die eine Reihe der aufgestellten Bü-

*) Spätere Anmerkung. Dass mehrere dieser Bücher späterhin wieder neu aufgelegt sind, versteht sich von selbst.

cher setzen, noch in die andere; denn er beabsichtigt nicht geradezu den Unterricht in der Raumlehre, sondern den in der Steinkunde. Doch gehört er nothwendig hierher, weil, wie ich glaube, er uns ein neues Feld für die Raumlehre, als Wissenschaft und als Unterrichtsgegenstand, eröffnet hat. Alle Raumlehre ist nämlich eigentlich doch kein Schaffen von neuen Gesetzen und Regeln in die Körperwelt hinein, sondern ein Entwikkeln aus der Körperwelt heraus. Darum ist die Schöpfung (die Natur) der eigentliche Sitz der Raumlehre, wie sich dies auch schon seit langen Zeiten sehr deutlich in der Sternenlehre gezeigt hat. Die neuern Mineralogen erforschten, seit Werner, Hauy, Weiß, die Steingebilde näher, und setzt man diese Betrachtungen weiter fort, geht zu den Pflanzen und Thieren über, so wird man sicher noch die herrlichsten Entdekkungen machen, und der Mathematik ein Leben geben und einen Geist, den wir jetzt kaum ahnen. Wenn Novalis sagt: „Es kann Mathematiker der ersten Größe geben, die nicht rechnen können; — man kann ein großer Rechner sein, ohne die Mathematik zu ahnen; — kann sich Gott nicht auch in der Mathemetik offenbaren, wie in jeder andern Wissenschaft?" — so schwebte ihm sicher die tiefe Mathematik der Schöpfung vor. — Gelangen wir zu der, so werden wir einsehen, dass es Thorheit sei, ohne Naturforschung ein Mathematiker sein zu wollen, da die Mathematik nur der Gipfel der Naturforschung ist. — Weil wir aber noch sehr fern von diesem Ziele sind, so müssen wir mit vieler Vorsicht nur das in der Raumlehre gebrauchen, was uns die Naturforschung dar-

bietet. Darum habe ich denn aus v. Raumers Schrift nur Weniges genommen, nur die Körperverwandtschaft der zwei Reihen vom Würfel ins Vierundzwanzigflach und vom Zwölfflach ins Sechszigflach. Die Größenbestimmungen, die v. Raumer daran angeschlossen hat, so wie die ganze Behandlung der Spitzflache und des Rautenflachs überging ich, um nicht mit einem Mal des Guten zu viel zu thun. Es wäre sehr zu wünschen, daſs die Mathematiker vom Fach es sich nicht verdrießen ließen, ein Mal in dem v. Raumerschen ABC-Büchlein etwas zu buchstabiren; ich mache um so mehr darauf aufmerksam, da der Titel des Buches den Mathematiker nicht so leicht berühren wird.

Was ich nun zu den Eigenthümlichkeiten meiner Schrift rechne, nicht als solches, was sie in Einzelnheiten allein hat, sondern als das, was in der Gesamtvereinigung ihr allein angehört, möchte Folgendes sein:

1) Sie ist für den Unterricht eingerichtet, und gibt dem Lehrer, der selbst noch nicht recht in der Lehrart Fertigkeit besitzt, die gehörigen Fingerzeige. Diese machen aber das Buch nicht unausstehlich weitläuftig, wie das bei manchen Büchern der Fall ist, die in einem bandwurmähnlichen Wechselgespräch zwischen Schüler und Lehrer den ganzen Unterricht durchführen.

2) Es ist der ganze Unterricht auf die Anschauung gegründet, und somit der würkliche Grund aller Raumlehre in seine alten Rechte wieder eingesetzt und der Begriff in seine gehörigen Schranken gewiesen. Was sind auch unsere Axiome und Postulate anders, als Sätze, die sich auf stehende Erfahrungen und Anschauungen

gründen, und die für den, der diese Anschauungen nicht gehabt hat, immer Wahrheiten bleiben, die ihm wie aus den Wolken zufallen. Viele Sätze, wozu wir mühsame Beweise suchen, z. B. die Lehre vom Gleichlauf der Striche und von dem Winkelverhältniss bei einer Durchschneidung derselben, sind reine Sache der Anschauung; Beweise verwirren nur, Anschauungen geben allein dabei das Grundlicht. — Auf diese Anschauungen haben zwar mehrere, z. B. Hoffmann, Graßmann und Andere, die von der Pestalozzischen Schule angeregt wurden, viel gegeben; allein sie fassten, meiner Meinung nach, die Sache zu einseitig auf, indem sie zu sehr sich auf Strich- und Flächen-Anschauungen beschränkten; da doch diese erst durch die Körper-Anschauungen einen wahren Hintergrund erhalten.

3) Diese vorzügliche Beachtung der Körper*) gleich von Anfang an halte ich ebenfalls für eine Eigenthümlichkeit meines Buches. Durch eine gegenständig übersichtliche Ordnung ist in den meisten Lehrbüchern der Messkunst die Körperlehre viel zu weit nach hinten gedrängt worden, und so kam es denn, dass in sehr vielen Schulen die Schüler gar nicht zu ihr gelangten. Sie ward als eine Art höherer Raumlehre schon betrachtet. Allein die Körperlehre hat viele Theile, die außerordentlich leicht sind, und die viel Licht auf andere Gegenstände werfen, weshalb ihre Zurücksetzung sehr nachtheilig ist. Lado-

*) Den vermittelnden Uebergang, der zwischen der Flächenlehre und der Körperlehre gewöhnlich vorkommt, und der von der Lage der Flächen handelt, konnte ich deshalb übergehen.

mus sagt zwar schon in seiner geometrischen Construktions-Lehre: „Für Lehrer bemerke ich schließlich noch, dass die vorgetragenen Sätze der Polyplanimetri am besten durch körperliche Darstellungen veranschaulicht und bewiesen werden, so wie mich auch die Erfahrung lehrte, dass den jungen Leuten die Verfertigung derselben bei gehöriger Anleitung großes Vergnügen verursacht;" — allein er geht doch selbst in die Körper nicht ein.

4) Ich habe den ersten Versuch gemacht, einen Theil von dem, was die Minerkunde der Raumlehre erworben hat, in dieselbe aufzunehmen, einerseits, weil gerade dieser Theil außerordentlich bildend ist für die mathematische Kraft des Schülers, andrerseits, um damit wirklich zu zeigen, wie unser mathematischer Unterricht noch viel Leben aus Quellen erhalten kann, die man jetzt wenig beachtet hat.

5) Das eigentliche Messen, was gewöhnlich erst vorkommt, nachdem der Schüler alle die Sätze gehabt hat, welche die alten Raumlehrer durch Messübungen herausgebracht haben, und die also als Früchte der eigentlichen Messübungen zu betrachten sind, und keineswegs als Grundlagen, dies Messen ist weit nach vorn gerükkt, und mehr von der Anschauung abhängig gemacht, als von Begriffserörterungen.

6) Ueberhaupt habe ich mich bestrebt, Lehren auf Uebungen und Anschauungen, Gesetze auf einzelne Fälle, Theorie auf Praxis folgen zu lassen, welches der alte natürliche Weg des Lebens ist. Denn die Geschichte der Mathematik zeigt es überall, dass die wichtigsten Entdekkungen bei sogenannten praktischen Versuchen gemacht

wurden. Das Können führt uns weit sicherer zum Wissen, als letzteres zum ersteren. Doch fühle ich sehr wohl, daſs in dieser Beziehung ich hätte noch weit mehr leisten sollen. An manchen Stellen wird man das Umgekehrte finden, weil es mir unmöglich war, in jedem einzelnen Theil das als allgemein wahr anerkannte und im Ganzen befolgte Gesetz zu beobachten. Auch würde an mehrern Stellen durch eine ängstliche Beobachtung dieser Regel eine zu große Einförmigkeit, an andern eine übermäßige Weitläuftigkeit entstanden sein, welche beide in gleichem Maaß zu vermeiden waren. Ueberall aber, wo auch das Wissen dem Können, die allgemeine Lehre, der besondern Anwendung vorangeht, wird man doch beide innigst verknüpft finden, so daſs sie sich wechselseitig beleuchten und durchdringen.

7) Diese Durchdringung beider, des Könnens und Wissens, findet hier nicht allein darin statt, daſs durch Selbstauffindung der Beweise die Kräfte der Schüler angeregt werden sollen, was auch in vielen andern Büchern der Art, die nach J. Schmid erschienen sind, empfohlen ist, sondern daſs auch die Anwendung aufs Leben sich den Lehren selbst unmittelbar anreiht. Schiebt man die Anwendung bis ans Ende, so sieht der Schüler lange Zeit gar nicht ein, wie seine Schulwissenschaft auch ihn in das Leben führt, und da so manche Lehrbahn nicht bis ans Ende gewandelt wird; so bekommen denn viele Schüler nur die Begründung, nicht die Anwendung, und bleiben also in einer sonderbaren innern Bildungsentzweiung stehen. Auch wird jeder wissen, der den alten Weg gewandelt ist, daſs die sogenannte

Anwendung höchst ermüdend für den Schüler war; denn die Gesetze kannte er, mithin das eigentlich Erfrischende. Dazu wurden ihm nun einzelne Fälle gegeben, die ihn nicht anziehen konnten, da sie nothwendig aus den Gesetzen erfolgten. Ist die Sache umgekehrt, so dass man beides gleich mit einander nimmt, so erhellet das eine das andere, und beides erquikkt im gleichen Maaße den Schüler.

8) Dass ich durch Findenlassen der Sätze und durch mehrere Uebungen die mathematische Kraft bilde, und so dahin arbeite, dass der Schüler, der das Gelernte weiß, zugleich damit die innere Kraft erhalte, vieles damit Verwandte von selbst sich zu erwerben, das kann ich nicht als etwas Eigenthümliches an meinem Wege betrachten; dass ich aber damit den fleißigen Gebrauch von Richtscheit (Lineal) und Zirkel (Passer) verbinde, und schon diese beiden Werkzeuge den kleinsten Kindern in die Hände gebe, das möchte wohl weniger allgemein sein. Ich selbst trug anfänglich Bedenken, den Kindern so früh diese beiden Aerme der Raumlehre, wie ich sie nennen möchte, in die Hände zu geben; allein die Erfahrung hat mich darüber belehrt, es geht sehr gut.

Das Machen von Körpern und das Anschließen mancher Zeichenübungen an den eingeschlagenen Weg ist nichts Besonderes, das musste sich von selbst so finden.

Manche Uebungen und Lehren scheinen etwas willkührlich an einander gereiht zu sein; allein untersucht man nur näher die Ordnung, so wird man finden, dass sie doch überall stattfindet; freilich die Ordnung nur, welche subjectiv durch die Auffassungskraft des Schülers be-

dingt ist. Doch wird man auch die gegenständige (objective) überall da antreffen, wo die erste keine Aufhebung derselben gebot. Ein gewandter Lehrer würde leicht hie und da auch eine andere Ordnung einschlagen können, ohne im Wesentlichen von dem Lehrbuche abzuweichen. Denn es liegen ja die wissenschaftlichen Lehren und Uebungen nicht bloß nach einander, sondern auch neben einander; wir aber sind in der Darstellung gezwungen, das neben einander Liegende nach einander zu legen.

Obgleich ich das Ganze in der Anschauung begründet habe, so ist doch im weitern Ausbau dem Verstande alles Recht wiederfahren, und ich bin keineswegs der Meinung, daſs das, was Sache des Verstandes ist, soll der Anschauung überwiesen werden. Ich kann auch denen nicht beistimmen, die da sich mit einem ungefähren Beweis, mit einer bloßen Erläuterung begnügen; sondern ich meine, der Schüler müsse sehr streng und sehr vollständig die Beweise führen; denn sonst führt man ihn zur Oberflächlichkeit. Der Lehrer, der alles auf der Anschauung begründet, muſs um so mehr auf genaue Beweise halten, weil seine Schüler weit weniger gleich von Anfang sich daran gewöhnen, als die, welche vorn weg zu Beweisen schreiten. Man hat darum wohl den Weg der Anschauung getadelt, und behauptet, daſs die darauf geführten Schüler nie streng einen Lehrsatz beweisen könnten; allein das liegt daran, daſs mancher Lehrer nicht gehörig die Sachen der Anschauung von den Sachen des Verstandes trennt, und nicht die Schüler, sobald sie zu letztern kommen, auch gleich auf die gehörige Verstandesbahn bringt.

Mein anfänglicher Plan ging auf eine vollständige Trennung der Raumlehre der Anschauung von der des Verstandes, wie ich solche in meinem Handbuch des Volksschulwesens auch angegeben habe; allein ich sah bald, daſs diese Trennung eine zu künstliche sein würde, und daſs man ihr zu gefallen vieles spalten müſste, was in seiner genauen Vereinigung doch nur die rechte Beziehung hätte. Somit gab ich eine solche förmliche Trennung auf, im Wesen ist sie aber würklich vorhanden. Denn nicht allein, daſs fast der ganze erste Theil nur Wahrheiten der Anschauung enthält, so sind auch in den beiden übrigen Theilen überall den Verstandes-Wahrheiten die Anschauungen vorangeschikkt, die jenen den Grund legen. Ich nenne nämlich „Anschauung eine „jede innere Wahrheit, die sich äußerlich so darstellt, daß „sie Keiner, dessen Inneres nur etwas ausgebildet ist, „verkennen kann." Alle Anschauungen haben darum ihren Grund im Wesen des Menschen und den Formen seines Bewuſstseins, sie werden aber äußerlich in der Regel wahrgenommen, und heißen dann äußere Anschauungen, im Gegensatz der innern, denen freilich auch etwas Aeußeres entspricht, aber ein Aeußeres, was mehr eine That, als eine Sache ist. Solche Anschauungen sind nicht weniger wahr, als Verstandessätze, ja sie sind mehr wahr. Verstandeswahrheiten werden erst aus Anschauungswahrheiten errechnet, ermittelt, erfolgert. Die ganze Raumlehre enthält wenigstens eben so viele Anschauungs- als Verstandeswahrheiten, und alle letzten gründen sich auf die ersten, darum muſs der Schüler, der auf dem rechten Wege zu den

letzten gelangen soll, ordentlich mit den ersten befreundet sein. Soll er das, so muss man ihm viele Aufgaben darin geben, damit er darin arbeitet und so darin lebt. Ist dies geschehen, so wird er die Verstandessätze nach erfinden, und der Lehrer braucht sie ihm nicht vorzulehren. Er wird in die Lage der griechischen Raumlehrer treten, die schöpferisch arbeiteten, und so die Wissenschaft in sich ausbildeten und sie nicht sich anlernten. Wären die Griechen nicht so sinnig gewesen, und hätten nicht ihre Anschauungen überall so viele Gegenstände gefunden, hätten sie nicht in Marmor so fleißig gearbeitet; so würden ihre Fortschritte in der Raumlehre nicht so groß gewesen sein.

Nachdem mir die förmliche Eintheilung der Raumlehre, in die der Anschauung und in die des Verstandes, wegen des Verwachsenseins beider nicht mehr gefiel; so kam ich in große Verlegenheit über die Anordnung der Stoffe und über ihre Vereinigung zu größern und kleinern Ganzen. Denn Schmieder sagt in seinem Buche, S. 21, mit Recht: „die Wahrheiten der Geometrie hängen nicht durchgehends, wie eine Kette, sondern wie ein Netz zusammen. Ein Satz greift in sehr viele andre zugleich ein, und man kann einen und denselben Satz auf sehr verschiedne Art beweisen, d. h. ihn von sehr verschiednen Sätzen herleiten, mit welchen er also zusammenhängen muss." Troß dieses Zusammenhangs in Länge und Breite, soll dennoch ein Lehrbuch alle diese Wahrheiten in eine einzige Kette bringen, der Verfasser desselben muss daher gleichsam das Netz zerschneiden und aus den einzelnen Stücken eine Kette

bilden. Daraus erklärt es sich denn auch, wie bei aller innern Nothwendigkeit und unbedingten Wahrheit der einzelnen Sätze doch dieselben in den verschiedenen Lehrbüchern so verschieden an einander geknüpft und mit einander in Verbindung gesetzt sind; so daſs man wohl auf den Gedanken kommen könnte, diese Verbindung sei etwas Nebensächliches. Allein das kann nicht sein; denn es kommt darauf viel an, die Sätze so an einander zu reihen, daſs darin ein Uebergang vom Leichtern zum Schwerern, von der Knospe zur Frucht stattfindet. Ich habe mich bestrebt, alle Sätze so zu ordnen und ebenmäßig an einander zu fügen, und durch größere Abtheilungen wieder das Gleichartige zusammen zu fassen. Die Hauptabtheilung in drei Theile, welche ich so nirgends gefunden habe, wie sie hier gemacht ist, gründet sich, nach meiner Meinung, auf dasselbe Gesetz, wonach die Hauptabtheilungen in der Zahllehre gemacht sind. Die Zahllehre macht nämlich in ihrem ersten Theil mit ihren Größen überhaupt bekannt, sie führt in ihre Welt hinein, sie legt die Zahlen (numeri) dar, läſst numeriren. Auf gleiche Weise legt unser erster Theil den Raum dar, wie er sich in Körpern ausprägt, und in Flächen und Strichen begränzt. Wie sich die ganze Zählung (numeratio) nur durch Anschauung recht auffassen läſst, so auch dieser erste Theil, den wir die Räumung nennen könnten. Der zweite Theil der Zahllehre behandelt die Zahlen nach den ursprünglichsten Gesetzen der Vermehrung und Verminderung, also nach den vier Species — Addition, Subtraction, Multiplication und Division. Der zweite Theil unserer Raumlehre behandelt den Raum

ebenfalls nach diesen ursprünglichsten Gesetzen des Mehr und Minder, führt darum zum Messen, zur Deckung und zur Inhaltgleichheit. Wie die vier Species auf alle Arten der Zahlbenennungen angewandt werden, auf Pfunde und Thaler, auf Ellen und Tonnen, so wird das Messen auf alle mögliche Körper und Körpergränzen angewandt. Der dritte Theil der Zahllehre stellt ungleichartige Dinge durch Vergleichungen zusammen, eßt sie in Verhältnisse und vermittelt so eine Befreundung des Geschiedenen. Er enthält die Verhältnißrechnungen, die Regula de tri. Eben so hat es der dritte Theil der Raumlehre mit dieser Verhältnißbestimmung der Flächen und Körper zu thun, mit dem Schwersten, weil das Getrennte darin vereinigt wird. Unser dritte Theil ist die wahre Regula de tri der Raumlehre. Im ersten Theil sowohl der Zahl- als der Raumlehre faßt man jedes Mal eine Größe an sich auf, im zweiten Theil werden stets wenigstens zwei Größen aufgestellt, im dritten Theil wenigstens drei Größen oder Größentheile, um daraus ein viertes Unbekanntes zu ermitteln.

Ich hoffe, daß diese Uebereinstimmung meiner Eintheilung der Raumlehre mit einer alten Eintheilung der Zahllehre (Arithmetik) ihr wird das Wort reden. Die Unterabtheilungen sind gemacht nach der Scheidung von Strichen, Flächen und Körpern, und die Gruppungen darin nach der Verwandtschaft der einzelnen Sätze. Weil ich hierin oft geändert habe, so nehmen die Kupfer nicht dieselbe Folge, die das Buch hat; allein weil alles mit Zahlen gehörig angezeigt ist, so wird man dies wohl zu keinem Uebelstand rechnen.

Oefter kam mir bei der Arbeit der Gedanke ein, auch das Verständlichste von der Dreiekklehre (Trigonometrie) mitzunehmen; allein es ist dennoch unterblieben, theils, weil das Buch wenigstens um ein Viertel hätte stärker werden müssen, theils, weil doch auch das Leichteste aus der Dreiekklehre ohne Ausziehung der Geviert- oder Quadrat-Zahlen nicht zu behandeln und ohne Logarithmen und andere Tabellen nicht zu üben ist, so dass, thut man hier einen Schritt weiter, man sehr weit schreiten muss. Darum that ich diesen Schritt nicht. Selbst einiges Wenige, was man sonst wohl in die Raumlehre gezogen hat, z. B. die Verfertigung des kubischen Visirstabes, habe ich darum weggelassen. Somit hat denn diese Raumlehre verhältnissmäßig dieselbe Ausdehnung, die ich meinem Leitfaden zum Rechenunterricht gegeben.*)

Da dies Buch die Raumlehre in die Volksschulen einführen helfen soll, so würde es wohl ein großer Vorwurf für dasselbe sein, wenn es von vielen undeutschen Wörtern entstellt und dadurch den Volksschullehrern dunkel gemacht wäre. Darum habe ich mich bemüht, so viel möglich, Alles deutsch auszudrükken, doch wo es zwekmäßig war, mit Hinzufügung der undeutschen Wörter. Die meisten Wörter, welche diesem oder jenem aber

---

*) Spätere Anmerkung. Dieser Leitfaden erschien zuerst im Schulrath an der Oder und zugleich als ein besonderer Abdruck daraus, und ward dann, auf meine Bitte, von dem durch Herausgabe mehrerer Zeichensachen rühmlichst bekannten Hrn. M. Mücke erweitert. Nach demselben System bearbeitete späterhin der Hr. Seminarlehrer Scholz sein von mir bevorwortetes Rechenbuch, das so großen Beifall gefunden hat.

neu scheinen möchten, sind keinesweges neu, sondern aus andern Schriften entlehnt; nur drei bis vier mögen von mir gebildet sein. Spätige Vierekke statt Parallelogramme, Gradbogen statt Transporteur, Geere statt Diagonale, die Absehe statt Diopter, Schiene und Richtscheit statt Lineal, Achtflach statt Octäder, Raumlehre statt Geometrie, sind längst von Andern gebraucht, und das gewöhnlich von ausgezeichnet sachkundigen Männern, z. B. von Abel Bürja. Dies nur für die, welche jedes fremde Wort beherbergen, aber ein junges deutsches Wort gleich aussetzen und verstoßen.

Das Inhaltsverzeichniss ist mit Fleiß so lang ausgedehnt, weil es soll einen Ueberblikk über das Ganze geben. — Hiermit genug!

Breslau, am Ende des Jahres 1821.

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Es freuet mich, daſs meine Raumlehre, ungeachtet der vielen Lehrbücher, welche wir jetzt in diesem Fache besitzen, seit ihrer Erscheinung immer begehrt ist, und seit Begründung vieler neuen Bürger- und Gewerbsschulen, starken Absatz gehabt hat. Ja Friedrich von Raumer fand sie in England, wenn gleich als **Roumlere** empfohlen, und Wehrhan sahe sie am Fuß der Pyrenäen in Brauch. Nicht dies aber, sondern die Ueberlegung, daſs sie in ihrer jetzigen Form eben so nützlich den Seminarien und geförderten Volksschulen, wie den Bürger- und Gewerbschulen ist, bestimmten mich, bei ihrer neuen Auflage, das alte Gepräge ganz beizubehalten, und nur einzelne vorhandene Mängel abzustellen. Bei dieser letzten Arbeit unterstützte mich mein Amtsgenosse, Hr. Seminarlehrer und Musikdirektor Hentschel, dem ich dafür hier bestens danke.

Manche Gegenstände, welche meine Raumlehre zuerst in die Schulwelt brachte, sind jetzt schon in mehrere andere Lehrbücher übergegangen, z. B. das Anfangen mit den Körpern, statt mit den Strichen. Ich muſs dies jetzt auch noch besonders empfehlen, und wünsche nur dabei, daſs kein Lehrer es sich verdrießen lasse, die Körpernetze im Großen zu zeichnen, woraus dann jeder Buchbinder die Körper zu machen im Stande ist. Nur bei Unordnung gehen sie leicht entzwei oder kommen abhanden. Leider ist der Lehrer Hülsig, der früherhin sie fertig lieferte, heimgegangen.*)

Für die Lehrer, welche zu meiner Raumlehre noch eine Formlehre suchen, kann ich, außer denen von Hesse, Tobler und Sauermann besonders Stubbes geometrische Constructionslehre; Neisse bei Hennings 1833 (15 sgr.) empfehlen. Wer neben meiner Raumlehre zu allerlei Aufgaben und zu Vergleichungen noch Bücher zu besitzen wünscht, dem kann ich empfehlen: Diesterwegs Raumlehre; Bonn 1828 (16 Bogen, 1 Thlr.) — Dessen Formen- und Größenlehre, 3te Aufl. Elberfeld 1836 (5½ Bogen, 15 sgr.) — Wittmars Raumlehre, Karlsruhe 1836 (7½ Bogen, 10 sgr.) — Steins Grundlehren der Geometrie für die ersten Anfänger, von Hoffmann; 3te Aufl. Frankfurth 1836 (10½ Bogen,

*) Noch bitte ich sämmtliche Lehrer, welche dies Lehrbuch gewählt haben, bestens darauf zu halten, daſs die Schüler alle Zeichnungen selbst auf Papier und das genau und sauber machen; denn das Gutmachen ist wenigstens eben so wichtig, als das Einsehen.

$\frac{5}{12}$ Thlr.) — Selwichs Raumlehre; Königsberg 1836 (14 Bogen $1\frac{1}{3}$ Thlr.) — Prass Anfangsgründe der theoret. und prakt. Geometrie. 2te Aufl. Stuttgardt 1836 ($29\frac{1}{4}$ Bogen $2\frac{1}{2}$ Thlr.) — Tellkampf Vorschule der Mathematik, 2te Aufl. Berlin 1835 (28 Bogen 1 Thlr. 20 sgr.) — Heusingers Grundlehren der Größenkunst, Leipzig 1835 ($28\frac{1}{2}$ Bogen $2\frac{1}{6}$ Thlr.) — Laubers Elemente der Geometrie, Berlin 1835 (21 Bogen $1\frac{1}{3}$ Thlr.) — Wer die descriptive Geometrie näher verfolgen will, dem ist zu empfehlen, Wolff: die beschreibende Geometrie für den Unterricht am Gewerbeinstitut. Theil I. Berlin 1836 (22 Bog. $3\frac{1}{6}$ Thl.) Größere Werke für den, welcher die Raumlehre in dem Umfange, wie sie hier gegeben ist, beendet hat, gibt es sehr viele. Ich erwähne unter den neuern nur die anerkanntesten, als von Hunäus, Zehender, Sachs, Ohm, Lorenz, Müller, Umpfenbach und Fischer. Weiter in die Literatur der Raumlehre hier einzugehen, verbietet der Ort und die Zeit. Darum breche ich ab.

Weißenfels, den 31. März 1837.

W. H.

Einleitung für solche Schullehrer, die bisher wenig oder gar nichts von der Raumlehre kannten.

Das vorliegende Buch, lieben Lehrer, soll Euch mit einem Gegenstande bekannt machen, der dem Menschen überall so nahe liegt, der aber bisher von unsern Volksschulen weit entfernt war, — mit der Raumlehre oder der Meßkunst; gewöhnlich Geometrie genannt.

Der Weg, den wir eingeschlagen haben, um zu diesem Gegenstande zu gelangen und uns seiner zu bemeistern, ist nicht so gar rauh und uneben; hin und wieder trefft Ihr sicher darauf auch bekannte Sachen, die Euch aber in einem neuen Licht erscheinen und deshalb doppelt lieb sein werden. Jeder Weg hat indeſs seine Beschwerden, und jede Wanderung desselben erfordert Zeit, Lust und Kraft; und selten erlangt der Mensch etwas Rechtes ohne Mühe und Anstrengung; erwartet also auch auf unserm Wege keine Ernte ohne Aussaat, keine Frucht ohne Arbeit! — Damit Ihr aber im Voraus ungefähr erfahret, wodurch und wohin unser Weg geht, so will ich Euch so durch ein Fernrohr die Gegenden überblikken lassen, zu denen wir kommen, wenn wir den Weg ernstlich wandeln. Stärkt dazu Eure Augen, indem Ihr in ein anderes Feld sehet, was Euch bekannt ist, in das der Zahlen!

Weil es außerordentlich viele gleichartige Dinge gibt, so müssen wir diese, um sie aufzufassen, zählen. Der Mensch kann viele tausend Mal tausend Pflanzen, Thiere, Sandkörner u. s. w. zählen. Man kann abzäh-

len und zuzählen, nach Gesetzen die Zahlen vermehren und vermindern, vervielfältigen und theilen. Ja, der Rechenmeister bringt unbekannte Zahlen aus bekannten heraus; der Sternforscher berechnet unsre Jahre, und den Lauf der Gestirne eben so richtig und oft richtiger, als der Staatsbeamte die Einkünfte eines ganzen großen Reiches. Ueberall, im Leben und in der Schöpfung, tritt uns etwas Zählbares entgegen; die Pulsschläge sind die Lebensuhren bei Menschen und Thieren, die Jahre die Uhrenschläge unserer Erde, und wird ein Kind geboren, so muss es sein zu einer Zeit, und stirbt es, so geschieht es zu einer Zeit; und Alles, was in einer Zeit geschieht, wird mit Zahlen bezeichnet. Der Aermste zählt und der Reichste. Könige und Bettler berechnen, jene vielleicht die Tausende von Kriegsvölkern, die zu ihrem Befehl stehen, diese die Pfennige, die sie am vorigen Tage erbettelt haben, und beide nähren dabei Furcht und Hoffnung.

Allein so allgemein die Zahl verbreitet ist, und so häufig, als sie auch vorkommt, der Raum steht ihr nicht nach. Wer der Geschaffnen wäre wohl, der sich in keinem Raum befände? — Gehe auf das Meer, verbirg dich in den Tiefen der Erde, erklettere die höchsten Gipfel der Berge, fahre in einem Luftballe zwischen den Wolken umher, schließe dich in dein einsames Kämmerlein, du bist und lebst in einem Raume. Und Alles, was du an dir hast, es bedarf des Raumes, selbst das Sandkorn, womit der Wind spielt, und das Thierchen, das du nicht mit deinen Augen erkennest, es bedarf des Raumes; und wo es selbst lebt und ist, da kann kein andres Wesen sein. Wie das Kleine, so das Große! Unsere Erde und jeder andre Weltkörper hat seinen Raum und seine Ausdehnung, und wo er ist, da kann nicht zu gleicher Zeit ein andrer sein, und jeder Körper füllt einen Raum aus. Je ausgedehnter der Raum ist, den ein Körper ausfüllt, desto größer ist er, und desto mehr

Platz braucht seine Masse. Die Sonne braucht viel mehr Platz, als unsre Erde, diese mehr als der Mond, und dieser mehr als die Wesen, welche auf der Erde leben. Manche Wesen sind in einander, z. B. die Vögel in der Luft, die Fische im Wasser, manche Würmer und andre Thiere in der Erde; andre sind auf einander, z. B. viele Thiere auf den Bäumen und auf andern Thieren, aber jedes hat seinen Raum, jedes seine Größe und jedes auch seine Gestalt. Die Sonne, unsere Erde und der Mond sind rund, die Eier länglich rund, die Blätter breit, manche Steingebilde haben wunderschöne Flächen, Kanten und Ekken, und wie abwechselnd sind nicht die Formen unter den Thieren! — So ist die Welt voll der mannigfaltigsten beweglichen und unbeweglichen Körper, die von verschiedener Form und Größe da sind, als Zeugen der Allmacht und Güte ihres Schöpfers. Manche stehen an einander und neben einander, manche aber sind durch weite Räume getrennt und berühren sich nie. Dies gilt von den Weltkörpern, welche im großen Weltenraum schwimmen.

Wie man nun Dinge nach ihren Zahlen vergleicht, z. B. 10 Thaler mit 100 Thaler, 1000 Menschen mit 10,000, so kann man auch die Dinge in Absicht ihrer Größe und ihrer Form, in Hinsicht ihres Raumes, ihrer Ausdehnung und ihrer Entfernungen von einander vergleichen; man sieht da, welche Dinge größer, welche kleiner, welche gleich, welche ungleich, welche ähnlich, welche unähnlich, welche weit, welche nah, welche oben und unten, neben und in einander sind. Seht da die Raumlehre oder die Meßkunst, eine gar alte Sache, wenn sie Euch und vielen Tausenden auch ganz neu erscheinen sollte.

Sonderbar ist es: in allen unsern Schulen wird gerechnet und doch treibt man nicht die Meßkunst, die ein rechtes Geschwister von jener ist, und die auch

überall Hand in Hand mit ihr geht, bei den Sternen sowohl, als wenn sich der Bettler ein Brod kauft. Denn wie es bei den Sternen nicht allein wichtig ist, wie viele da sind, sondern auch, wie groß jeder ist, so liegt dem Bettler nicht bloß daran, daß er zwei oder drei Brode hat, sondern er muss sich auch darum bekümmern, wie groß sie sind. Es ist kein Gewerbsmann, der sich der Meßkunst ganz entrathen könnte. Der Zimmermann kann keinen Balken behauen, kein Bret sägen, kein Holzschroot fügen, ohne zu messen; der Tischler, Bötticher und alle, die da arbeiten in Holz und Horn, Erz und Thon, ja selbst Schneider und Schuhmacher, sie müssen messen. Der Töpfer und alle die Handwerker, die Sachen von mancherlei Gestalten zum Nutzen und Frommen der Menschen schaffen, sie müssen der Formen kundig sein. Wie man aber allerlei Formen schafft und allerlei Dinge ausmisst, das lehrt die Meßkunst. Gehen wir in den Städten von Haus zu Haus, wo wir Leute finden, die aus irgend welchen Stoffen künstliche Sachen verfertigen, sie bedürfen des Rathes, den die Meßkunst gibt. Selbst der Landmann bedarf dessen; nicht blos darum, weil er sich mancherlei Werkzeuge selbst fertigt, als Pflüge und Wagen, oder weil er seine Bauten anordnet und den Bau-, Zimmer- und Maurermeister zugleich macht; sondern auch darum, weil er doch muss seine Felder abtheilen und ausmessen, damit er weiß, wie viel er zu säen hat, wie viel er wohl mit Gottes Hülfe ernten kann, und wie einträglich der Boden sei. Will er einen Graben ziehen, einen neuen Weg anlegen, Bäume pflanzen, Gehege errichten, so wird er dies alles mit mehr Geschikk und Blikk thun, wenn er die räumlichen Verhältnisse kennt, wenn er Formen machen und Richtungen messen kann. Ich will hier gar nicht noch erwähnen, dass im menschlichen Leben überall auch die schönen Anordnungen ihren Werth haben, z. B. gute Anordnung der häuslichen

Geräthe, gefällige Anlagen von Gärten, und daſs alle die Anordnungen auch nur von dem werden würklich gut ausgeführt werden, der in der Raumlehre nicht unerfahren ist.

Es sei genug! — Die Raumlehre hat im Leben denselben Werth, als die Zahllehre oder das Rechnen, und darum dürfen wir nicht länger sie in den Volksschulen versäumen; sie gehört mit demselben Recht da hinein, wie das Rechnen und das Singen, das Lesen und das Schreiben. Sehen wir ferner darauf, welchen Einfluſs die Betreibung der Raumlehre auf die Bildung des Schülers überhaupt hat, so werden wir doppelt verpflichtet, sie nicht länger aus den Volksschulen auszuschließen. Man sagt immer, das Rechnen übe die Denkkräfte, und wer viel rechne, der werde gescheidt. Ich will dem nicht ganz widerreden; allein es ist ausgemacht, daſs die Raumlehre weit mehr den Kopf aufräumt und die Denkkräfte weit mehr stärkt, als das Rechnen. Das Rechnen ist zu einfach, als daſs es die vielfachen Seiten des Verstandes so in Anspruch nehmen könnte, a s die Raumlehre, deren Vielfachheit gerade so recht geeignet ist, die Denkkraft von allen Seiten anzuregen und zu entwikkeln. Es zeigt sich dies auch im gemeinen Leben. Die Leute, welche viel gerechnet haben, als Kaufleute und Rechnungsbeamte, sind oft außerordentlich unbeholfen, wenn sie in Schikkungen und Lagen kommen, die etwas Abweichendes von der Regel haben. Sie fühlen sich gleich unsicher, sobald die Zahlen nicht mehr bei einer Sache die Hauptsache ausmachen. Dagegen haben die Leute, welche sich als Bauleute, als Schiffer, als Zimmerleute, Maurer u. s. w. viel mit der Ausübung der Raumlehre beschäftigten, einen Blikk für die Verhältnisse des Lebens, der Durchsicht, Umsicht und Einsicht in die Körper und Geister und Ueberschauung ihrer Verhältnisse und Beziehungen voraussetzt. Darum ehrt

die Raumlehre! Sie hat einen großen Werth im Krieg und im Frieden! Wer eine Schlacht will gewinnen, der muss die Feldlehre (Terrainlehre) inne haben, und leicht den Boden zu überschauen verstehen, der den Sieg tragen soll. Und selbst die Schöpfung oder die Natur, sie wird uns erst recht lebendig, wenn unser Auge in der Raumlehre sich an die Form- und Größengesetze gewöhnt hat. Die Gesetze, nach denen Steine wachsen, Blumen und Blätter sich gestalten, die Formen, welche durch diese Gesetze erzeugt werden, die Richtungen, welche alle Wesen in ihrem Selbstbilden nehmen und wie alle diese von dem Finger Gottes vorgeschrieben sind, wer möchte das nicht alles schauen und einsehen, wie man die Bahnen von Sternen messen, ihre Abstände bestimmen und so im großen Weltenbuch lesen kann? — Es geht das freilich alles nicht so leicht, und jeder, wer die unterste Sprosse einer Leiter betritt, gelangt nicht zur höchsten, aber wer auch nicht zur höchsten kommt, von wo aus er alle Sternenwelten überschauen und wie ein Gartenbeet ausmessen kann, kommt er nur mehrere Sprossen hoch, er sieht da schon viel. — Drum, Freunde, wohlan! Nicht gezaudert!

Doch noch eins! es giebt einige Leute, die meinen, es sei bisher ohne die Raumlehre in den Volksschulen gegangen, und es werde auch ferner so gehen können; es sei in diesen Schulen nicht Zeit vorhanden, um solche Dinge zu betreiben, die da recht gut wären für die gelehrten Schulen, oder auch wohl für die höhern Bürgerschulen; — wenn der Zimmermann und Maurer, der Töpfer und Bauer so etwas gebrauchten, so würden sie es ja in ihrem Beruf schon lernen, wie so manches Andere. — Das ist freilich nicht so ganz übel. Oder, was meint Ihr? — Ich für meinen Theil frage zuerst: wer sind denn die, welche so reden? Verstehen sie auch von dem etwas, was sie reden, und haben sie die reine Sache im Auge, oder hüpfen sie nur mit ihren allgemeinen Ansichten um

dieselbe herum? In der Regel habe ich gefunden, dass zweierlei Leute gegen die Einführung der Raumlehre in Volksschulen sind; die einen darum, weil sie nichts davon wissen, und darum meinen, eine Sache, die ihnen so fern liege und ihnen sogar schwer erschiene, könne unmöglich den Kindern beigebracht werden. Die meisten dieser Leute haben in der Regel auch nur eine niedrige Ansicht von den Volksschulen, und es gilt ihnen das Hergebrachte über Alles. Die andern Gegner sind der Sache selbst sehr kundig, allein sie stellen die Wissenschaft höher, als das Leben, und es ist ihnen bange, dass durch die Einführung der Raumlehre in die Volksschulen diese Wissenschaft erniedrigt und entwürdigt werde. Sie befürchten, dass Kinder, die so früh zu diesem Gegenstand geführt würden, denselben nur oberflächlich erfassen könnten, und dass sie, ein Mal an Oberflächlichkeit gewöhnt, diese würden in ihre spätere Ausbildung mit hinüber nehmen. — Allein diese Gegner mögen sich daran erinnern, dass man Kindern Milch giebt, und daß diese Milch sie zur Empfangung derberer Speisen herauf nährt. Von Oberflächlichkeit kann bei einem guten Unterricht der Kinder in der Raumlehre nicht die Rede sein; aber Gelehrte sollen auch nicht in den Volksschulen gebildet werden. Was es anbetrifft, dass die Raumlehre bisher in den Volksschulen nicht gelehrt ist, so gehört das zur Wahrheit; allein ist eine gute Sache bisher in den Staub getreten, so kann das nicht zum Beweise dienen, dass es eben so sein müsse, und was bisher überhaupt nicht gewesen ist, das soll auch nimmer sein, so können wir doch nicht schließen. Der Sonne kann man es nicht vorwerfen, dass sie nicht scheint, wenn Wolken zwischen ihr und uns liegen. Sie thut ihr Möglichstes, und scheint an trüben Tagen so gut als an heitern. Die Wolken, die bisher es verhinderten, dass die Raumlehre den Volksschulen nicht schien, diese waren gebildet von

der Unwissenheit der meisten Volksschullehrer und von der niedrigen Lage der Volksschulen selbst. Die Nacht der Volksschullehrer verwandelt sich in Tag, und man hat große Abzugsgräben gemacht für die Sümpfe des Volksschulwesens. Die Sonne scheint nun immer heller und heller. Ist es auch so, lieben Lehrer? — Wie? — Rede ich die Wahrheit; so wird die Raumlehre in Euren Schulen Raum finden. Es ist nicht nöthig, sie überall in dem Umfang, wie sie hier dargestellt ist, zu betreiben. Das wird wenigen Lehrern gelingen. Ja, ich zweifle daran, ob viele werden bis an den dritten Theil kommen; aber Jeder thue das Seinige, und das mit Umsicht und Liebe, ohne Eitelkeit und ohne Posaunen! — Dabei lasse er sich durch kein unbegründetes Reden in seinem guten Werk stören. Selbst wenn Jemand meinen sollte, die Raumlehre gehöre zu den umtrieberischen Künsten, weil der Schullehrer sie missbrauchen könne bei Ackervertheilungen, und dadurch Aufruhr erregen. *) Was kann man nicht alles missbrauchen! Wer die Raumlehre in den Volksschulen darum nicht dulden will, weil man sie missbrauchen kann, der muss, will er folgerecht bleiben, den Menschen die Augen ausstechen; denn sie können ja damit Schätze sehen, die sie zum Stehlen verleiten; er muss die Zunge ausschneiden, denn sie kann ja zum Verläumden gebraucht werden; er muss alle Wissenschaften verdammen, denn sie alle sind des Missbrauchs fähig.

Wir halten fest an der Raumlehre, nicht als an einer umtrieberischen Wissenschaft, die Staaten zerstört,

*) Spätere Bemerkung: Dies klingt vielleicht sonderbar. Aber ein jetzt verstorbener Staatsbeamte, unter den auf eine eigenthümliche Weise die Breslauschen Seminarien und Gymnasien zu stehen kamen, hatte diese Furcht.

sondern als an einer der segensreichsten Wissenschaften der Erde, die Städte und Dörfer, Straßen und Brükken, Schiffe und Wagen erbaut hat, und in der Gradheit und Richtigkeit recht zu Hause sind, Ungradheit und Lüge aber niemals geduldet werden. Diese ehrliche Kunst, die Meßkunst, ist so alt, als die Bildung. Man gibt gewöhnlich an, daſs sie in Aegypten zuerst ausgebildet sei. Weil nämlich alljährlich der Fluſs Nil das Land überschwemmte, so wurde auch die Bodenfläche oft verändert, und so kam man wohl darauf, nach der Ueberschwemmung das Land gehörig wieder zu vermessen und einzutheilen. *) Auch fing man bald an, die Vortheile dieser Ueberschwemmungen kennen zu lernen, indem der Nil einen Schlamm auf den Feldern zurückließ, der die Fruchtbarkeit beförderte. Dies veranlaßte die Ziehung künstlicher Gräben, um das Nilwasser weiter zu verbreiten, und die Anlegung künstlicher Behälter, um das Nilwasser zu erhalten und es in den dürren Jahreszeiten zur Ueberwässerung zu gebrauchen. Dieses Anlegen von Gräben und Wasserbehältern musste auf die Meſskunst

*) Der älteste griechische Geschichtschreiber Herodot berichtet Folgendes: „Man erzählte mir, daſs Sesostris (König von Aegypten) das Land unter alle seine Unterthanen vertheilt hätte, und daſs er jedem einen gleichen Theil Landes im Geviert gegeben, mit dem Befehl, jährlich eine verhältniſsmäßige Steuer zu entrichten. Geschah es nun, daſs von Jemandes Antheil durch den Fluſs etwas weggeführt wurde, so begab er sich zum Könige, und zeigte an, was vorgefallen war. Alsdann sandte der König Leute hin, welche untersuchen und ausmessen muſsten, um wie viel das Stükk Land kleiner geworden war, damit er nach Verhältniſs nur von dem übrig gebliebenen Stükke die auferlegte Steuer entrichten durfte. Ich glaube, daſs auf diese Weise die Meſskunst erfunden, und nach Griechenland hinüber gebracht ist.“ — Uebrigens wird dasselbe Verfahren auch heut zu Tage, der Steuern wegen, wohl in allen Staaten bei Ländereien angewandt, die durch Flüsse verkleinert oder auch vergrößert sind.

großen Einfluſs haben. Vielleicht auch waren die Aegyptier schon vom Tigris und Eufrat her eingewandert, und hatten von da aus mehrere meſskünſtlerische Kenntnisse und Fertigkeiten mitgebracht, die sie denn in Aegypten nur weiter ausbildeten. Alles aber weist uns dahin, daſs in Aegypten wenigstens die Meſskunst große Fortschritte gemacht hat, wenn sie ihre Anfänge auch anderwärts nahm. Die Aegyptier führten große Gebäude auf, bearbeiteten mächtige Felsenstükke zu künstlichen Spitzsäulen, ja die Werke ihrer Baukunst erregen noch jetzt das Staunen, und ihre verschütteten Grabmähler und Schiffsgräben sind redende Beweise davon, daſs sie die Meſskunst in der That inne hatten. Freilich, künstliche Regeln mochten sie darüber noch nicht besitzen; denn die That und das Leben gehen überall der Regel und der Lehre voraus. Diese Regeln und Lehren schufen erst die G r i e c h e n, welche sich an den Aegyptiern bildeten. Sie gaben diesen Regeln und Lehren den Namen Feldmeſskunst, Ceometria (von γη die Erde und μετρεω ich messe). Einer der ersten unter den Griechen, der sich mit der Feldmeſskunst vorzüglich beschäftigte, und mehrere neue Lehren und Grundsätze dafür erfand, war Euphorbos, aus Troja in Kleinasien gebürtig. Thales, aus Milet, berühmt unter den Griechen ob seiner Weisheit, weshalb er auch zu den sieben Weisen Griechenlands gezählt wird, machte sich etwa 630 Jahre vor Christus um die Feldmeſskunst sehr verdient. Er unternahm ihretwegen in seinem Alter noch eine Reise nach Aegypten und Indien, und war einst, lustwandelnd in der Betrachtung der Sterne und ihrer räumlichen Verhältnisse zu einander, so vertieft, daſs er in einen Graben fiel. Auch er fand mehrere neue Regeln, Sätze und Lehren auf. Er soll zuerst die Höhe der ägyptischen Spitzsäulen an ihrem Schatten gemessen, die Winkelmessung durch Kreisbogen erfunden und die Gleichheit der Schei-

telwinkel entdekkt haben. Tiefer aber, als alle seine Vorgänger, drang der weiseste aller Griechen, Pythagoras, von Samos gebürtig, in die Meßkunst ein. Kaum 20 Jahr alt, reis'te er nach Aegypten, war sehr vertraut mit der Weisheit der Indier, lebte größtentheils in Italien und starb zu Metapontum im Jahr 540, achtzig Jahr alt. Er gebrauchte zuerst den Namen Mathematik, und bezeichnete damit alle die Lehrsätze und Grundregeln, welche auf die Zahl und auf den Raum gehen, so daſs die Mathematik, zu Deutsch Größenlehre, 2 Hauptwissenschaften in sich enthält, nämlich die Zahllehre (die Rechenkunst, Arithmetik) und die Raumlehre (die Meßkunst, Geometrie). Alles Uebrige, was man zur Größenlehre rechnet, ist nur eine Anwendung oder weitere Ausführung dieser beiden Wissenschaften; z. B. die Sternkunde (Astronomie), die höhere Zahllehre (Algebra), die höhere Dreiekklehre (Trigonometrie) u. s. w. Pythagoras ordnete die Lehren und Regeln der Meßkunst nicht allein und brachte mehr Ueberschaulichkeit darein, sondern mit seinem scharfen Blikk drang er in die Tiefen dieser Wissenschaft und erfand viele neue Sätze. Einer darunter ist so wichtig, daß er noch heut zu Tage der pythagorische Lehrsatz heißt. — Der bekannte Plato (390 vor Chr.), ein Schüler des Sokrates, that auch das Seine zur Verbreitung und Ausbildung der Meßkunst. Er setzte bei dem Vortrag der höhern Wissenschaften die Raumlehre voraus, und hatte darum über die Thüre seines Lehrsaales geschrieben: „Keiner komme herein, der nicht die Raumlehre schon getrieben hat!" Aber er trug auch selbst die Raumlehre bis zu seinem Tode (im J. 346) vor, täglich einen wichtigen Satz erörternd und beweisend. Mehrere andere Weisen der Zeit thaten dasselbe, z. B. Hippokrates aus Chios, nicht zu verwechseln mit dem berühmten Arzt Hippokrates, der aus Cos gebürtig war. Allein Keiner hat sich einen so großen Namen in der

Meßkunst erworben, als Euklides, ums Jahr 300 vor Chr. Er war öffentlicher Lehrer der Größenlehre zu Alexandria, der berühmten Handelsstadt Aegyptens, und zeichnete sich eben so sehr durch Liebenswürdigkeit in seinem Betragen, als durch Gründlichkeit in seinem Wissen und Vortrefflichkeit in seinem Vortrage aus. Er schrieb das vorzüglichste Lehrbuch der Meßkunst, abgefaßt in 15 (13) Abschnitten oder Büchern, was noch jetzt vorhanden ist, und als die Urmutter aller daseienden Lehrbücher betrachtet werden kann, indem es über 2000 Jahr alt ist. Man hat davon Uebersetzungen in allen gebildeten Sprachen der Erde; denn der Urtext ist natürlich griechisch. Die beste deutsche Bearbeitung dieser Bücher ist von Hoffmann, Mainz, 1829, bei Kupferberg besorgt.*) — Der Weg, den Euklides einschlug, hat wohl etwas Weitschweifiges, indem die Beweise oft zu ängstlich sind, und er zu wenig auf Anschauung gibt; allein Euklides bleibt dessen ungeachtet einer der größten Raumlehrer. Für unsere Zeiten möchte er vielleicht derb erscheinen. Denn als er den ägyptischen König Ptolomäus Lagi in der Raumlehre unterrichtete, und dieser meinte, ob es denn dem Euklides nicht möglich sei, für ihn den Weg etwas ebner zu machen; so antwortete er: „Zur Raumlehre gibt es keinen besondern Weg für Könige.“ — So sehr auch Euklides die Meßkunst regelte oder ordnete, es blieb noch immer etwas darin zu thun übrig. Dies zeigte am besten der funfzig Jahr später lebende Archimedes von Syrakus, den man für den tiefdenkendsten Größenlehrer (Mathematiker) des Alterthums hält. Er erfand die beste Berechnung des Kreises und der Kugel. Die letzte Berechnung soll ihm selbst so lieb gewesen sein, daß er anord-

*) Anmerk. Andre bekannte Bearbeitungen sind: a) Hauff: die Elemente Euklids; 2te Auflage. Marburg 1807; b) Mollweide: Euklids Elemente, funfzehn Bücher von Lorenz. — Halle 1824.

nete, die Zeichnung dazu sei auf seinen Leichenstein zu setzen. Er nützte auch seiner Vaterstadt durch seine Wissenschaft außerordentlich, da sie von den Römern angegriffen wurde, und zeigte durch Erfindung von allerlei Vertheidigungs- und Angriffswerkzeugen, daſs die Meſskunst es mit mehr, als bloßen Strichen auf dem Papier, zu thun habe. Leider fand Archimedes seinen Tod bei Eroberung seiner Vaterstadt von den Römern; ein Soldat erstach ihn, nicht wissend, welchen großen Mann sein Stahl treffe. Archimedes soll gerade mit der Lösung einer Aufgabe beschäftigt gewesen sein, als der Soldat auf ihn stieß, und er denselben gebeten haben, ihm doch nicht seine Zeichnungen, die in Sand gemacht waren, zu verwirren. Seine Landsleute vergaßen ihn bald. Mit großer Mühe suchte 200 Jahr nach seinem Tode der Römer Cicero sein Grabmahl auf; man fand es nach langem Suchen unter Dornensträuchen verstekkt, und erkannte es an der Darstellung des oben erwähnten Satzes auf dem Denkmahl. — Nicht viel steht Apollonius, aus Perga, der funfzig Jahr nach Archimedes lebte, diesem nach. Seine Verdienste um die Kegelschnitte sind groß.

Die Römer haben die Meſskunst nicht so gefördert, als die Griechen; sie benutzten nur, was jene geschaffen, ohne selbstschöpferisch weiter zu bilden. Dazu fehlte diesem, ins Weite gehenden, Volk der tiefe Sinn. Nach dem Verfall der Wissenschaften schlummerte viele Jahrhunderte hindurch die Größenlehre. Da traten die Araber auf, und wandten die Meſskunst vortrefflich auf die Sternkunde an. Abalphat übersetzte im zehnten Jahrhundert die Schriften des Apollonius ins Arabische, und Alhazen zeichnete sich im zwölften Jahrhundert aus. Der Bausinn, welcher im Abendlande erwachte, und uns die schönen Dome und Münster gab, die wir noch jetzt bewundern, und mehrere andere Regungen der Zeit, bewürkten endlich, daſs in Europa, vorzüglich in Deutsch-

land, England und Frankreich, der Meßkunst sich Viele widmeten, und diese Kunst und Wissenschaft von Neuem belebten. Die Entdekkung mehrerer Länder, die Erfindung des Kompasses, die Ausbildung der Schifffahrt und vieles Andere arbeitete an der Erweiterung dieser Wissenschaft, und an ihrem Gebrauch zur Erforschung der Schöpfung und zur Förderung des Lebens. Es ist unmöglich, hier allein alle die großen Männer unter den Deutschen zu nennen, die sich um die Bearbeitung der Raumlehre verdient gemacht haben, als Wolf, Kästner, Karsten, Klügel u. s. w. — Wichtiger noch, als diese Bearbeiter, sind die Weiterbildner der Wissenschaft selbst. Es gehören dazu vor allen Andern Copernicus († 1543), der Entdekker der Bewegung der Erde; Tycho Brahe († 1601); Galilei, der viel von dem Ketzergericht der damaligen Zeit leiden musste, weil er (1615) öffentlich die Bewegung der Erde um die Sonne lehrte; Kepler († 1631); Des Cartes (Kartesius), der 1637 seine Raumlehre herausgab; Leibnitz († 1716); Newton († 1727); Euler († 1783). Durch diese Männer und mehrere andere ist die ganze Größenlehre (Mathematik) und damit auch zugleich die Raumlehre viel weiter ausgebildet, als dies bei den Griechen der Fall war.

Manches bleibt noch übrig, vor allem aber die Verbreitung dieser wichtigen Wissenschaft ins gewöhnliche Leben. Sie war jetzt zu sehr auf einen engen Kreis beschränkt; entweder beschäftigten sich bloße Stubengelehrte damit und behandelten sie als eine dürre Wissenschaft, ohne alle weitere Anwendung auf Schöpfung und Leben, oder man bediente sich ihrer im Leben, ohne wahrhafte Liebe zu der Wissenschaft selbst.

Von Euch, Ihr Volksschullehrer, hängt es ab, ob das nun fernerhin so bleiben, oder ob jeder an seinem Theil auch an dem sich erlaben soll, was Gott für Alle geschaffen hat. Auf Euch kommt es an, ob ferner der

einfache Bürger und Bauer ganz unkundig der räumlichen Verhältnisse, worin er täglich sich bewegt, sein, oder ob er, kundig derselben, auch in ihnen die Allmacht und Allliebe des Ewigen erkennen, und sie zu seinem und seiner Nebenmenschen Wohl benutzen soll. Thut das Eure! Ihr werdet Freude daran haben, und Vielen Freude dadurch bereiten.

Bevor wir nun zur Sache selbst schreiten, muſs ich noch einige Bemerkungen, als Fingerzeige, über das Verhältniſs dieses Unterrichts zur Volksschule überhaupt, und zu den einzelnen Unterrichtsgegenständen insbesondere, voranschikken:

1) In den Volksschulen, welche keine getrennten Klassen haben, worin also ein Lehrer Schüler von sehr verschiedenem Alter zugleich zu unterrichten hat, kann die Raumlehre nicht füglich als ein besonderer Gegenstand auftreten, sondern sie gehört mit zu den Uebungen der Anschauung, wovon sie einen sehr wesentlichen Theil ausmacht. Man vergleiche hierüber mein „Handbuch für das deutsche Volksschulwesen. Den Vorstehern, Aufsehern und Lehrern bei den Volksschulen gewidmet. Zweite Auflage. Breslau, 1829, bei Graſs, Barth und Komp." (1 Thlr.) — Seite 337 u. folgg.

2) In den Volksschulen, deren Einrichtung von der Art ist, daſs wenigstens zwei getrennte Klassen bestehen, kann der Unterricht in der Raumlehre schon als ein selbstständiger Gegenstand in der obern Klasse auftreten. In der untern Klasse wird er durch Uebungen der Anschauung vorbereitet. Man vergleiche meine: „Erste faſsliche Anweisung zum vollständigen deutschen Sprachunterricht. Fünfte verbesserte Auflage. Breslau 1832, bei Graſs, Barth und Komp." (15 Sgr.) — Seite 80 u. folgg. — Auch wird man in diesen Schulen schwerlich im Stande sein, den zweiten Theil des hier aufgestellten Unterrichtsganges ganz durch zu machen.

3) In Schulen, die drei getrennte Klassen haben, kann man bei weiser Eintheilung der Zeit und bei gehöriger Anstrengung der Schüler zur Noth das, was im vorliegenden Buche behandelt ist, ganz durcharbeiten; vorzüglich wenn man die Einrichtung trifft, dass man ein halbes Jahr hindurch ein Mal täglich eine Stunde nimmt, und so lange einen andern Gegenstand zurückbleiben lässt. Denn es ist ein anerkannter Grundsatz beim Unterricht, nicht Vielerlei zu einer Zeit, sondern wenig, und das tüchtig! — Dieser Grundsatz warnt uns zugleich gegen das Eilen, um nur viel zurükk zu legen. Selbst in dreitheiligen Schulen ist es besser, es wird das hier Aufgestellte nicht Alles behandelt, und gründlich, als Alles, und oberflächlich. „Eile mit Weile.“

4) Die Raumlehre eignet sich mehr für Knaben als für Mädchen; in eigentlichen Mädchenschulen fällt sie darum ganz weg. In Schulen, worin Mädchen und Knaben zusammen unterrichtet werden, ist es zwekkmäßig, die Mädchen während der Zeit, dass die Knaben Raumlehre haben, mit Handarbeiten oder andern passenden Dingen zu beschäftigen, z. B. mit Zeichnen. Erlaubt aber die Schuleinrichtung eine solche Trennung nicht, so können auch die Mädchen Antheil nehmen an der Raumlehre, vorzüglich an den Anfängen, die es noch mit bloßer Anschauung zu thun haben. Späterhin muss man sie aber mehr mit dem Zeichnen beschäftigen; theils von solchen Gebilden, die in dem Unterrichte selbst vorkommen, theils von Vorlegeblättern, vorzüglich von denen, die Blumen und allerlei Sachen enthalten, welche den weiblichen Geschmakk bilden.

5) Ohne Abtheilungen wird kein Lehrer bei dem Unterricht in der Raumlehre fortkommen, wenn er seinen Unterricht den Fähigkeiten der Schüler anpassen will. Denn es wird sich selbst bei einer geringen Anzahl von äußerlich gleichartigen Kindern doch bald in der Raum-

lehre eine große Verschiedenheit im Fortschreiten zeigen. Hat nun gar der Lehrer dem Alter und der Bildung nach sehr verschiedene Schüler, wie dies in den meisten Volksschulen der Fall ist, so ist er noch mehr gezwungen, an Abtheilungen zu denken. Die Schwierigkeiten, mehrere Abtheilungen in der Raumlehre gut neben einander zu beschäftigen, sind auch gar nicht so groß, wie bei manchen andern Gegenständen, zumal, wenn der Lehrer sich erst Alles recht eingerichtet hat und die Schüler im richtigen Zuge sind. Es kann der Lehrer zwei bis drei Abtheilungen sogar ohne Helfer leiten; indem doch bei weitem mehr Uebungen und Aufforderungen vorkommen, als Erklärungen und Erörterungen, die durch Wechselgespräche zwischen Schüler und Lehrer zu erreichen sind. Hat der Lehrer mehr als drei Abtheilungen, so wird er wohlthun, bald diesen, bald jenen Schüler aus einer obern Abtheilung als Helfer bei untern Abtheilungen zu gebrauchen, und so den Unterricht zu vervielfältigen.

6) Der Unterricht, wie er hier aufgestellt ist, kann mit Schülern, die der Elementarklasse entwachsen sind, angefangen werden; solche Kinder sind reif dazu, und wachsen im Fortschreiten immer weiter in den Gegenstand hinein. Sollte jedoch der Lehrer hier und da merken, daſs etwas den Schülern schwer fiele, so bleibe er desto länger dabei stehen, allmälig wird es sich fügen und schikken. Ich glaube, daſs andere Lehrer dieselbe Erfahrung bei diesem Gegenstande machen werden, die ich gemacht habe, nämlich daſs er den gröſsten Theil der Schüler anzieht; natürlich, weil er so mannigfaltig ist, und der Anschauung und der Bildekraft so viel Stoff darbietet.

7) Weil die Sprache bei allen Unterrichtsgegenständen so wichtig ist, so darf sie auch bei keinem vernachlässiget werden. Darum hat der Lehrer in der Raumlehre zugleich auf den Ausdrukk zu achten, und muſs die

Schüler davor bewahren, daſs ſie in einſeitigen Redensarten Alles ausprägen, und ſo an immer wiederkehrende Sprachformen ſich gewöhnen. Die häufige Wiederkehr mancher Sprachformen iſt zwar unvermeidlich, weil die Sachen wiederkehren, und wichtige Geſetze der Wiſſenſchaft müſſen ſchon darum in feſten Sprachformen ausgeprägt werden, weil es gut iſt, der Lehrer übt ſie durch Vor- und Nachſprechen, zumal mit ſchwächern Schülern ein.

8) Wie bei jedem Unterricht, ſo hat auch bei dieſem der Lehrer den aufgeſtellten Leitfaden nach manchen äuſsern Verhältniſſen und Bedingungen abzuändern. Hierhin rechne ich vornämlich die Hülsmittel. Kann ein Lehrer für ſeine Schule gar keinen Körper anſchaffen, wird ſelbſt es ſchwer, ordentliche Lineale und Zirkel zu erhalten, ſo iſt das ſehr ſchlimm; aber der Unterricht ſelbſt braucht deshalb noch nicht aufgegeben zu werden, ſondern er iſt hin und wieder zu beſchränken. Iſt die Schulſtube ſo eng, daſs nicht alle Schüler an Tiſchen zeichnen können, oder daſs die Einrichtung der Abtheilungen mit vielen Uebelſtänden verknüpft iſt; ſo muſs man das bedauern, und möglichſt alle Hinderniſſe beſeitigen; aber keineswegs die Sache ſelbſt wegen Schwierigkeiten aufgeben. Jeder Lehrer mag bei den Uebungen auch achten auf die Jahreszeiten! Meſsübungen im Freien fallen am beſten in die heitern Tage des Spätſommers, und die Verfertigung von allerlei Körpern, aus Pappe, Thon und Holz, das iſt eine köſtliche Beſchäftigung in den langen Winterabenden.

Inhalt.

Erster Theil.
Anschauungen und Darstellungen.

Erster Abschnitt.
Die einfachsten Anschauungen und Darstellungen.

Erste Uebung.
Auffassen und Benennen der Grundkörper.

§. 1. Die Säulen oder Kante . . . Seite 3
§. 2. Die Spitzsäulen oder Spitzen . . . 3
§. 3. Die Flache 3
§. 4. Lage der 3 Körperreihen 6

Zweite Uebung.
Nachmachen und Benennen der Grundflächen.

§. 5. Grundflächen 6

Dritte Uebung.
Auffassen und Benennen der Grundrichtungen.

§. 6. Richtungen zur Erde 8
§. 7. Richtungen zu einander 10

Zweiter Abschnitt.
Die einfachen Betrachtungen und Bildungen.

Erste Uebung.
Auftragen der Striche und Winkel.

§. 8. Grader Strich und Kreisstrich . . . 12
§. 9. Winkel, Nebenwinkel, Scheitelwinkel . . 13

§. 10. Rechte, spitze, stumpfe Winkel . . . S. 14
§. 11. Verhältniſs von Winkel und Kreis . . 14
§. 12. Bildung des rechten Winkels . . . 15
§. 13. Nachbildung eines Winkels . . . 17
§. 14. Bildung gleichlaufender Striche . . 17

Zweite Uebung.

Das Betrachten und Machen der Grundflächen.

I. Die Dreiekke.

§. 15. Das gleichseitige Dreiekk 20
§. 16. Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreiekk . 20
§. 17. Das spitzwinklig-gleichschenklige Dreiekk . 21
§. 18. Das stumpfwinklig-gleichschenklige Dreiekk . 21
§. 19. Das rechtwinklig-ungleichseitige Dreiekk . 21
§. 20. Das stumpfwinklig-ungleichseitige Dreiekk . 22
§. 21. Das spitzwinklig-ungleichseitige Dreiekk . 22
§. 22. Verhältniſs zwischen Winkel und Seiten in den Dreiekken 22

II. Vierekke.

§. 23. Das Geviert (Quadrat) 23
§. 24. Das Rechtekk 23
§. 25. Die Raute 23
§. 26. Die Schrägraute 24
§. 27. Ein halb regelmäßiges Viereck . . . 25
§. 28. Ein ganz unregelmäßiges Viereck . . 25

III. Vielekke.

§. 29. Ein regelmäßiges Fünfekk . . . 25
§. 30. Ein regelmäßiges Sechsekk . . . 26
§. 31. Ein regelmäßiges Achtekk . . . 26
§. 32. Andere Vielekke 27

Dritte Uebung.

Das genauere Betrachten der Grundkörper.

§. 33. Körpergränzen. 28

I. Die Säulen.

§. 34. Die dreiseitige Säule 29
§. 35. Die vierseitige Säule 30
§. 36. Die fünfseitige Säule 31
§. 37. Die sechsseitige Säule 31

§. 38. Die achtseitige Säule . . . . S. 32
§. 39. Die Walze 32

II. Die Spitzsäulen.

§. 40. Die dreiseitige Spitzsäule . . . 33
§. 41. Die vierseitige Spitzsäule . . . 34
§. 42. Die fünfseitige Spitzsäule . . . 34
§. 43. Die sechsseitige Spitzsäule . . . 35
§. 44. Die achtseitige Spitzsäule . . . 35
§. 45. Der Kegel 35

III. Die Flache.

§. 46. Das Vierflach 35
§. 47. Der Würfel 36
§. 48 Das Achtflach 37
§. 49. Das fünfekkige Zwölfflach . . . 37
§. 50. Das Zwanzigflach 39
§. 51. Die Kugel 40

Dritter Abschnitt.

Die schwerern Betrachtungen und Darstellungen.

Erste Uebung.

Strich=, Winkel= und Bogen=Bildung.

I. Winkel= und Strich=Bildung und =Theilung.

§. 52. Uebergang von §. 12 — 14 zu §. 53 und folgd. 41
§. 53. Bildung des rechten Winkels durch Bogen 42
§. 54. Drei andere Arten, den rechten Winkel zu bilden 42
§. 55. Theilung eines Striches in zwei gleiche Theile 43
§. 56. Theilung eines sehr langen Striches in 2 gleiche Theile 43
§. 57. Bildung gleichlaufender Striche ohne rechte Winkel 43
§. 58. Abtragung eines Winkels . . . 44
§. 59. Theilung eines Winkels in 2 gleiche Theile . 45

II. Verschiedene Bogenbildungen.

§. 60. Eine Stahlfederwindung aus Halbkreisen . 45
§. 61. Eine Schnekkenwindung aus Halbkreisen . 45
§. 62. Ein Linsenstrich durch Kreisbogen . . 46
§. 63. Ein Linsenstrich, dessen kleiner und großer Durchmesser gegeben ist 47

§. 64. Ein Eistrich . . . . S. 47
§. 65. Ein Schlangenstrich 48
§. 66. Ein Wellenstrich 48

Zweite Uebung.

Flächen in und neben einander.

I. Ein= und umzuschreibende Flächen.

§. 67. Ein gleichseitiges Dreiekk in einen Kreis . 49
§. 68. Ein Kreis um ein gleichseitiges Dreiekk . 49
§. 69. Ein Kreis in ein gleichseitiges Dreiekk . . 49
§. 70. Ein gleichseitiges Dreiekk um einen Kreis . 50
§. 71. Ein Geviert in einen Kreis . . . 50
§. 72. Ein Kreis um ein Geviert . . . 50
§. 73. Ein Kreis in ein Geviert . . . 50
§. 74. Ein Geviert um einen Kreis . . . 50
§. 75. Ein regelmäßiges Fünfekk in einen Kreis . 51
§. 76. Ein Kreis um ein regelmäßiges Fünfekk . 51
§. 77. Ein Kreis in ein regelmäßiges Fünfekk . 51
§. 78. Ein regelmäßiges Fünfekk um einen Kreis . 51
§. 79. Ein regelmäßiges Sechsekk in einen Kreis . 52
§. 80. Ein Kreis um ein regelmäßiges Sechsekk . 52
§. 81. Ein Kreis in ein regelmäßiges Sechsekk . 52
§. 82. Ein regelmäßiges Sechsekk um einen Kreis . 52
§. 83. Ein regelmäßiges Achtekk in einen Kreis . 52
§. 84. Ein Kreis um ein regelmäßiges Achtekk . 52
§. 85. Ein Kreis in ein regelmäßiges Achtekk . . 52
§. 86. Ein regelmäßiges Achtekk um einen Kreis . 53
§. 87. Ein regelmäßiges Neunekk in einen Kreis . 53
§. 88. Ein Geviert um ein gleichseitiges Dreiekk . 53
§. 89. Ein gleichseitiges Dreiekk in ein Geviert . 54
§. 90. Ein gleichseitiges Dreiekk um ein Geviert . 54
§. 91. Ein Geviert in ein regelmäßiges Fünfekk . 54

II. Nebengeschriebene Flächen.

§. 92. Zeichnung von Körpernetzen . . . 54

Dritte Uebung.

Körperliche Formen = Uebergänge.

§. 93. Vom Würfel ins Achtflach . . . 56
§. 94. Vom Achtflach in den Würfel . . . 58

§. 95. Vom Würfel zum Rautenzwölfflach . . S. 60
§. 96. Vom Rautenzwölfflach in den Würfel . 62
§. 97. Vom Achtflach zum Rautenzwölfflach . 63
§. 98. Vom Rautenzwölfflach ins Achtflach . . 64
§. 99. Vom Rautenzwölfflach zum Vierundzwanzigflach 64
§. 100. Vom Vierundzwanzigflach zum Rautenzwölfflach 66
§. 101. Vom Würfel zum Vierundzwanzigflach . 67
§. 102. Vom Vierundzwanzigflach zum Würfel . 68
§. 103. Vom Achtflach zum Vierundzwanzigflach . 69
§. 104. Vom Vierundzwanzigflach zum Achtflach . 70
§. 105. Vom Würfel zum Vierflach . . . 70
§. 106. Vom Vierflach zum Würfel . . . 71
§. 107. Vom Vierflach zum Achtflach . . 72
§. 108. Vom Achtflach zum Vierflach . . . 72
§. 109. Zwölfflach aus Fünfekken und Zwanzigflach . 73
§. 110. Vergleichung beider mit dem Dreißigflach . 73
§. 111. Vergleichung dieser 3 Körper mit dem Sechszigflach 75

Zweiter Theil.

Vergleichungen und Messungen.

Erste Uebung.

Das Messen und Vergleichen von Strichen und Winkeln.

I. Grade Striche und Richtungen.

§. 112. Zwei ungleich lange Striche . . . 78
§. 113. Zwei grade Striche neben einander . . 78
§. 114. Längenmaaße 79
§. 115. Der Kreisbogen als Winkelmaaß . . 80
§. 116. Unmeßbarkeit des Punktes . . . 80
§. 117. Ein grader Strich zwischen 2 Punkten . 80
§. 118. Folgerungen aus dem vorigen §. und Anwendung desselben 80
§. 119. Der grade Weg der kürzeste . . . 81
§. 120. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 81
§. 121. Entfernung zweier Punkte . . . 82
§. 122. Zwei Striche, theilweis in einander, in einer Richtung 83

§. 123. Anwendung des vorigen §. . . . 83
§. 124. Durchschneidung zweier grader Striche . 84
§. 125. Folgerung aus dem vorigen §. . . 84

II. Kreisstriche.

§. 126. Mittel, um Kreise zu schlagen . . 84
§. 127. Zwei Durchmesser in einem Kreise . . 85
§. 128. Der Durchmesser der längste Strich im Kreise 85
§. 129. Strahlen und Durchmesser gleich in selben oder in gleichen Kreisen . . 86
§. 130. Der Strahl, die Hälfte des Durchmessers . 86
§. 131. Gleiche Umkreise und Kreise bei gleichen Strahlen und Durchmessern . 86

III. Winkel.

§. 132. Dekkung der Winkel 86
§. 133. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 87
§. 134. Winkelhaken und Winkeldreiekke . . 87
§. 135. Der Gradbogen 87
§. 136. Der Feldwinkelmesser 87
§. 137. Winkelscheibe und Meßstischchen . . 88
§. 138. Drei Punkte als Winkellage . . . 88
§. 139. Dekkung eines Winkels durch mehrere . . 88
§. 140. Nebenwinkel gleich 2 rechten . . . 89
§. 141. Betrag der Winkel über einen Strich und um einen Punkt . . . 89
§. 142. Winkel unter 2 und 4 rechte . . . 89
§. 143. Gleichheit der Scheitelwinkel . . . 89

IV. Winkel an durchschnittenen gleichlaufenden Strichen.

§. 144. Ein Strich, der 2 gleichlaufende durchschneidet 90
§. 145. Winkel an einem Strich, der 2 gleichlaufende durchschneidet . . 90
§. 146. Wechselwinkel gleich, Gegenwinkel 180 Gr. . 90
§. 147. Gleichlauf, bedingt durch Winkel am Durchschnitt 91
§. 148. Durchschnittene ungleichlaufende Striche . 92
§. 149. Gleichlauf bei rechten Winkeln am Durchschnitt 93
§. 150. Die Winkel in spätigen Vierekken . . 93
§. 151. Bildung gleichlaufender Striche . . 93
§. 152. Winkelgleichheit bei Schenkelgleichlauf . 94
§. 153. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 94

V. Das Richtwägen.

§. 154. Bleiloth und Grundwage für senkrechte und wagerechte Richtungen . S. 95
§. 155. Das Richtwägen durch die Wasserwage . 96
§. 156. Das Richtwägen durch andere Werkzeuge . 97

Zweite Uebung.

Das Messen und Vergleichen von Flächen.

I. Das eigentliche Messen der Flächen.

§. 157. Flächenmessen und Flächenmaaße . . 100
§. 158. Messung des Gevierts . . . 101
§. 159. Messung des Rechtekkes . . . 102
§. 160. Messung der Schrägrauten und Rauten . 102
§. 161. Messung von rechtwinkligen Dreiekken . 103
§. 162. Ausmessung der übrigen Dreiekke . . 104
§. 163. Ausmessung der unregelmäßigen Vierekke und Vielekke 104
§. 164. Messung der regelmäßigen Vielekke . . 105
§. 165. Messung des Kreises 105
§. 166. Messung eines Kreisausschnittes und eines Kreisabschnittes . . . 106

II. Dekkung der Dreiekke.

§. 167. Gleichheit, Aehnlichkeit, Dekkung . . 107
§. 168. Bedingungen der wichtigsten Flächendekkungen 108
§. 169. Anwendung der Flächendekkung . . 109
§. 170. Dekkung der Dreiekke, bedingt durch einen Winkel mit den anliegenden Seiten . 109
§. 171. Anwendung des vorigen §. . . . 110
§. 172. Dekkung der Dreiekke, bedingt durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel 111
§. 173. Anwendung des vorigen §. . . . 111
§. 174. Gleichheit der Winkel an gleichen Schenkeln in einem Dreiekk . . . 113
§. 175. Nächste Folgerungen aus dem vorigen §. . 113
§. 176. Entferntere Folgerungen aus §. 174 . . 114
§. 177. Gleiche Schenkel in einem Dreiekk, bedingt durch 2 gleiche Winkel . . 115
§. 178. Folgerung aus §. 177 115
§. 179. Dekkung der Dreiekke, bedingt durch 3 Seiten . 115
§. 180. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 116

§. 181. Folgerungen aus den §§. 170, 172 und 179 S. 117
§. 182. Begründung der Winkeltheilung. (Folgerung) 117
§. 183. Anwendung des vorigen §. auf den Mittagsstrich 118
§. 184. Begründete Errichtung eines rechten Winkels an einem Punkt in einem Strich . . 119
§. 185. Begründete Errichtung eines rechten Winkels von einem gegebnen Punkt auf einen gegebnen Strich 119
§. 186. Begründete Strichtheilung . . . 120
§. 187. Folgerungen aus §§. 186 . . . 121

III. Seiten= und Winkelgleichungen in Dreiekken und Vierekken.

§. 188. Betrag aller Winkel in einem Dreiekk . 121
§. 189. Folgerungen aus §. 188 . . . 122
§. 190. Berechnung des dritten Winkels in einem Deeiekk aus 2 bekannten . . . 122
§. 191. Der Winkel am Dreiekk gleich den 2 entfernten im Dreiekk 123
§. 192. Folgerungen aus und Anwendung von §. 191 123
§. 193. Der gröẞte Winkel im Dreiekk entsprechend der längsten Seite 125
§. 194. Die längste Seite entsprechend dem gröẞten Winkel 125
§. 195. Folgerungen aus §. 195 . . . 126
§. 196. Verhältniſs der Seiten in Dreiekken . . 126
§. 197. Theilung der regelmäẞigen Vierekke in gleiche und ähnliche Dreiekke und Gleichheit der gegenüber stehenden Seiten und Winkel in regelmäẞigen Vierekken . . . 127
§. 198. Anwendungen des vorigen §. . . . 127

IV. Flächengleichungen, ohne Dekkung.

§. 199. Gleichheit der regelmäẞigen Vierekke bei gleichem Grunde und Höhe . . . 128
§. 200. Gleichheit der Dreiekke bei gleichem Grunde und Höhe 129
§. 201. Gleichräumigkeit von einem Dreiekk und einem Vierekk 129
§. 202. Verhältniſs der Dreiekke zu einander bei gleichem Grund oder bei gleicher Höhe . . 129
§. 203. Der Höhenwinkel bei Dreiekken von gleichem Grund oder von gleicher Höhe . . 130
§. 204. Verwandlung eines regelmäẞigen Vielekkes in ein gleichräumiges Dreiekk 130

§. 205. Verwandlung eines regelmäßigen Vielekkes in ein gleichräumiges regelmäßiges Vierekk . . . 131
§. 206. Zeichnung eines bestimmten Rechtekkes, das einem gegebnen Geviert gleichräumig ist . . 131
§. 207. Verwandlung eines Kreises in ein gleichräumiges Dreiekk 132
§. 208. Verwandlung eines Kreises in ein gleichräumiges regelmäßiges Vierekk . . . 132
§. 209. Bildung von verhältnißmäßig größern Dreiekken und regelmäßigen Vierekken . . . 132
§. 210. Geeren- und Seiten-Gevierte . . . 132
§. 211. Die Seitengevierte sind gleich dem Geerengeviert 133
§. 212. Folgerungen aus §. 211 . . . 134

V. Gleichungen bei Kreisen und Vielekken.

§. 213. Sehnen, bedingt durch Bogen und Bogen durch Sehnen 136
§. 214. Der Winkel am Mittelpunkt 2 Mal so groß als der am Umfang 137
§. 215. Folgerungen a ıs §. 214 . . . 139
§. 216. Ein Strich zur Sehne gemacht . . 141
§. 217. Nichtdurchschneidung gleichkerniger Kreise . 141
§. 218. Der Kreis durch den Durchmesser in 2 gleiche Theile getheilt 141
§. 219. Theilung der Kreisfläche in 4 gleiche Theile 142
§. 220. Wechselbestimmung von Winkel, Bogen un d Sehnen 142
§. 221. Der Strich, der winkelrecht die Sehne in 2 gleiche Theile theilt, hälftet auch den Bogen, und geht durch den Mittelpunkt . . . 142
§. 222. Wie man den Mittelpunkt eines Kreises findet 143
§. 223. Wie man zu 3 Punkten den Mittelpunkt findet 143
§. 224. Ein Strich, winkelrecht vom Mittelpunkt auf die Sehne gezogen, hälftet dieselbe . . 144
§. 225. Theilung der Winkel in einem regelmäßigen Vielekk 144
§. 226. Begründete Bildung von regelmäßigen und halb regelmäßigen Vielekken . . . 145
§. 227. Betrag der Winkel in regelmäßigen Vielekken 146
§. 228. Wie man ein regelmäßiges Vielekk umkreise . 146
§. 229. Berechnung der Winkel in einem unregelmäßigen Vielekk 146
§. 230. Bedingte Gleichheit von Kreisabschnitten . 147
§. 231. Lage des Punktes, in dem sich 2 Kreise berühren 147

§. 232. Folgerungen aus §. 231 . . . 148
§. 233. Der Streifstrich am Kreise . . . 148
§. 234. Der Strahl rechtwinklig auf dem Streifstrich 149
§. 235. Betrag der Winkel im und am Kreisabschnitt 149
§. 236. Folgerungen aus §. 235 . . . 150

Dritte Uebung.

Das Messen und Vergleichen der Körper.

I. Messung der Körper mit ebnen Flächen.

§. 237. Körpermaaße 151
§. 238. Eine halbregelmäßige Tafel . . . 152
§. 239. Die regelmäßige und vierseitige Säule und der Würfel 152
§. 240. Die regelmäßig dreiseitige Säule . . 153
§. 241. Die übrigen Säulen, deren Seitenflächen winkelrecht zum Grunde stehen . . . 153
§. 242. Säulen, die schräg stehen . . . 154
§. 243. Rautenflache 155
§. 244. Zerschneidung eines Würfels in 3 gleiche vierseitige Spitzsäulen 155
§. 245. Zerfällung der dreiseitigen Säule in 3 gleiche dreiseitige Spitzsäulen 156
§. 246. Jede Spitzsäule ein Drittel einer Säule von gleicher Höhe und gleichem Grund . . 157
§. 247. Das Vierflach 158
§. 248. Alle regelmäßigen und halb regelmäßigen Flache 158

II. Körperliche Gleichungen.

§. 249. Gleichheit und Aehnlichkeit bei Körpern . 159
§. 250. Gleichheit und Aehnlichkeit bei regelmäßigen Säulen und Spitzsäulen 159
§. 251. Gleichheit und Aehnlichkeit bei der Kugel und bei regelmäßigen Flachen . . . 159
§. 252. Räumliche Gleichheit bedingt durch Grund und Höhe 160
§. 253. Gleichräumige Körper bei ungleicher Form 160
§. 254. Körperverhältnisse 160
§. 255. Nur 5 regelmäßige Körper sind möglich . 161

III. Die Kugelmessung.

§. 256. Würfelinhalt der Kugel und Halbkugel . 162
§. 257. Gewöhnliche Berechnung des Kugelinhalts . 163

§. 258. Berechnung der Kugeloberfläche . . 163
§. 259. Vergleichung der Kugeloberfläche mit dem größten Durchschnitt derselben . . . 165

Dritter Theil.

Verhältniss-Gleichungen.

Erste Uebung.

Flächen.

§. 260. Die Verhältnisse 166
§. 261. Zu Gleichungen verbundene Verhältnisse . 167
§. 262. Entdekkung mancher Größen durch die Gleichungen 169
§. 263. Stets ähnliche Striche, Flächen und Körper 170
§. 264. Was Aehnlichkeit sei 170
§. 265. Messungen, gegründet auf Aehnlichkeit . 171
§. 266. Verjüngter Maaßstab 171
§. 267. Seitenverhältnisse, wenn in einem Dreiekk ein Strich gleichlaufend mit einer Seite gezogen wird 173
§. 268. Wie man verhältnißmäßige Striche bildet . 174
§. 269. Gleichlauf des in einem Dreiekk gezogenen Striches mit einer Seite, bei Verhältnißmäßigkeit der durchschnittenen Seiten mit ihren Theilen 176
§. 270. Aehnlichkeit der Dreiekke, bedingt durch 2 Winkel 177
§. 271. Folgerungen aus §. 270 . . . 178
§. 272. Anwendungen von §. 270 . . . 181
§. 273. Aehnlichkeit der Dreiekke, bedingt durch Gleichheit eines Winkels und Verhältnißmäßigkeit der anliegenden Schenkel . . . 183
§. 274. Anwendungen von §. 273 . . . 186
§. 275. Aehnlichkeit der Dreiekke, bedingt durch Verhältnißmäßigkeit aller Seiten . . . 188
§. 276. Das Auftragen eines Feldes . . . 189
§. 277. Beliebige Theilung eines Striches . . 194
§. 278. Umgekehrtes Seitenverhältniß bei verbundenen Uebersehnen 196
§. 279. Verhältniß aller Umfangsseiten zu einer Seite oder zu einer Geere . . . 197

§. 280. Die Umkreise verhalten sich, wie die Durchmesser 198
§. 281. Umgekehrtes Verhältniss von Grund und Höhe in gleichen, aber unähnlichen regelmäßigen Vierekken 198
§. 282. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 200
§. 283. Aehnliche regelmäßige Vierekke verhalten sich zu einander wie die Gevierte verhältnissmäßiger Seiten 200
§. 284. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 200

Zweite Uebung.

Körper.

§. 285. Verhältniss der Körper von gleicher Höhe und ähnlichem Grunde 202
§. 286. Verhältniss ähnlicher Körper . . . 202
§. 287. Durchschneidung einer Spitzsäule . . 204
§. 288. Die Kugel, eine Masse von Walzen . . 205
§. 289. Die Halbkugel zwei Drittel von einer Walze, mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe hat 206
§. 290. Verhältniss des Kugelinhaltes zum Würfelinhalt ihrer Axe 207
§. 291. Folgerungen aus dem vorigen §. . . 208
§. 292. Berechnung der Langrunde und Eirunde . 210
§. 293. Berechnung des Inhaltes von unregelmäßigen Körpern 210
§. 294. Gewöhnliche Körpermaaße . . . 211
§. 295. Der Fassmesser 211

Die Raumlehre

oder

die Messkunst.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Erster Theil: Anschauungen und Darstellungen.

Erster Abschnitt. Die einfachsten Anschauungen und Darstellungen.

Erste Uebung. Auffassen und Benennen der Grundkörper.

§. 1. Die Säulen oder Kante. Eine dreiseitige Säule oder ein Dreikant; eine vierseitige Säule oder ein Vierkant; eine fünfseitige Säule oder ein Fünfkant; eine sechsseitige Säule oder ein Sechskant; eine achtseitige Säule oder ein Achtkant; eine runde Säule oder eine Walze.

§. 2. Die Spitzsäulen oder Spitze. Eine dreiseitige Spitzsäule oder ein Dreispitz; eine vierseitige Spitzsäule oder ein Vierspitz; eine fünfseitige Spitzsäule oder ein Fünfspitz; eine sechsseitige Spitzsäule oder ein Sechsspitz; eine achtseitige Spitzsäule oder ein Achtspitz; eine runde Spitzsäule oder ein Kegel.

§. 3. Die Flache. Ein Vierflach; ein Sechsflach, oder ein Würfel; ein Achtflach; ein Zwölfflach; ein Zwanzigflach; eine Kugel.

Bemerkung. Die vorstehenden Körper kann sich der Lehrer leicht selbst verfertigen. Mit Ausnahme des letzten, der nicht gut sich aus Pappe machen lässt, sondern am besten aus Holz gedrechselt wird, können alle aus Papptafeln geschnitten werden. Die Netze dazu finden sich in den Kupfertafeln von 1 — 17, in derselben Folge, wie die Körper hier aufgestellt sind, also Zeichn. 1 — 6 die drei-, vier-, fünf-, sechs- und achtseitige Säule, wie die Walze; Zeichn. 7 — 12 die drei-, vier-, fünf-, sechs- und acht-seitige Spitzsäule und der Kegel; Zeichn. 13 — 17 das Vier-, Sechs-, Acht-, Zwölf- und Zwanzigflach.

Man kauft sich, um diese Körper zu machen, Pappe (Mappe) von mittlerer Stärke, und zeichnet, jedoch bei weitem größer, als hier geschehen ist, die Netze darauf. Bei diesem Aufzeichnen der größeren Netze hat man wohl darauf zu achten, dass dieselben Winkel, wie sie in den hier verzeichneten Netzen stattfinden, auch auf der Pappe gebraucht werden, so dass man nur die Striche verlängert. Wie man genau einen Winkel so groß macht, als einen gegebenen, das ist aus der ersten Uebung des folgenden Abschnittes zu erlernen. Bei den Körpern 1 — 6 zeichnet man zuerst die Seitenflächen, lauter gleiche Rechtekke bildend, und dann die obere und untere Fläche an eine Seitenfläche. Bei 7 — 12 bildet man die Seitenflächen am besten durch Kreisstükke, die man in gleiche Theile theilt, welche Theilung bei 12 aber nicht stattfindet. Bei 6 und 12 ist zu bemerken, dass der Durchmesser der Grundkreise nur braucht $3\frac{1}{7}$ Mal genommen zu werden, um den Grundstrich der Seitenfläche zu erhalten. Bei 12 ist das freilich sehr schwer, weil der Grundstrich der Seitenfläche ein Umkreisstükk ist. Wer mit 6 und 12 nicht gut fertig werden kann, lasse sie aus Holz drechseln, was leicht angeht. Hat Jemand einen Gradbogen oder Winkelmesser (Transporteur), so misst er die Winkel in den Netzen leicht ab. Die spitzen Winkel in 1, 13, 15, 17 sind 60 Grad, alle rechte Winkel 90, der stumpfe in 3, 9 und 16 enthält 108, der in 4 und 10 — 120, und der in 5 und 11 — 135 Grad. Die spitzen Winkel in 7, 8, 9, 10, 11 sind an den Seiten beliebig; allein die an der Spitze müssen alle gleich sein, und die am Grunde auch alle. Das Grunddreiekk von 7 hat Winkel von 60 Grad.

Hat man sich die Netze alle auf Pappe verzeichnet, so werden die Grenzstriche aus geschnitten, die Binnenstriche aber ein geschnitten. Man bedient sich dazu eines scharfen Messers, dessen Schärfung öfter wiederholt werden muss, weil die Pappe abstumpft. Damit die Ausschnitte und Einschnitte genau ausfallen, so muss man stets das Lineal oder Richtscheit dazu gebrauchen und alle Schnitte neben denselben hin machen. Ist ein ganzes Netz aus- und eingeschnitten, so beugt man es in die gehörige Form, was wegen der Einschnitte leicht ist. Nach dem Zusammenbeugen sieht man überall nach, ob auch nirgend ein Fehler stattfindet, und ist das nicht, so überklebt man den richtig zusammengebogenen Körper vorsichtig mit Papier, als Bindemittel sich des Leimes oder der gekochten Stärke, oder des Buchbinderkleisters bedienend. Man hat wohl dahin zu sehen, dass beim Bekleben alles die gehörige Form behält, und durch doppelte Papierlagen keine Unebenheiten entstehen. Uebung macht auch hier den Meister; aber die Sache ist so leicht, dass jeder Lehrer diese Körper machen kann. — Arbeitet ein unkundiger Lehrer für sich, ohne gleich anfangs die Körper zu machen, sich in dies Buch hinein, so wird er im weitern Fortschreiten auch immer geschikkter zur Verfertigung derselben werden, und sie so sicher haben, sobald er den Unterricht in seiner Schule anfängt. Der Lehrer muss aber einige Körper mehrfach besitzen, und zwar von verschiedener Größe, in verschiedenen Farben, und wo möglich auch aus mannigfaltigen Stoffen; denn sonst nimmt der Schüler die Anschauung leicht für zu sinnlich; er wähnt, dass nur grade Körper von gewisser Größe und Farbe und aus gewissen Stoffen würklich das sein, wofür sie der Lehrer ausgibt, andre aber von gleicher Form, bei sonstiger Verschiedenheit, ganz etwas anderes.

Für die Lehrer, welche undeutsche Namen lieben, werden hier noch solche für die in Rede stehenden Körper bemerkt. Die Säulen heißen **Prismata**, eine vierseitige Säule ein **Paralelepipidum**, eine Rundsäule Cylinder, eine Spitzsäule Pyramide, eine runde Spitzsäule **Conus**. Die Flache bilden die ganz regelmäßigen Körper und heißen undeutsch also: das Vierflach **Tetraeder**, das Sechsflach **Hexaeder** oder **Cubus**, das Achtflach **Octaeder**, das Zwölfflach **Dodekaeder**, das Zwanzigflach **Icosaeder**.

Anweisung. Der Lehrer, welcher diesen Unterricht anfängt, fragt nach den Namen von allerlei Gegenständen in der Stube und an den Kindern, bringt darauf allmälig einen Körper nach dem andern vor, sagt den Namen, fragt darnach, und lässt die Farbe und Masse angeben. Kommt derselbe Körper in einer andern Farbe vor, oder größer und kleiner, oder aus einem andern Stoff (was sich durch die Augen und durch die Hand wahrnehmen lässt — vorzüglich auch in Absicht der Schwere); so stutzen die Kinder; doch bald merken sie, dass es auf die Form ankommt. Allerlei Fragen bieten sich hier wohl jedem verständigen Lehrer von selbst dar; als: welche Körper stehen am festesten?, welche würden gut rollen?, welche zu Noth kugeln?, welche kann man legen und aufrecht stellen?. Auf solche Fragen folgt das Ordnen der Körper, und die Kinder werden sehr bald darauf kommen, dass (wie oben geschehen ist) sich die Körper in 3 Reihen ordnen lassen, und dass in jeder Reihe eine Stufung stattfindet. Hat man diese Ordnung machen lassen, so ergibt sich daraus Folgendes:

§. 4. Lage der 3 Körperreihen. Alle Körper der ersten Reihen liegen auf jeder Seite gleich gut, und stehen auf zwei Seiten gleich gut. Liegen sie, so heißen sie Kanten, stehen sie, Säulen. Alle Spitzsäulen stehen nur auf einer Fläche. Liegen sie, so sehen sie wie umgefallen aus. Alle Flache stehen oder liegen auf allen Seiten auf eine gleiche Weise.

Anweisung. Dieses hier im Allgemeinen Aufgestellte ist nicht von den Kindern so allgemein aufzufassen und auszudrükken, sondern bei jedem Körper besonders, weil der Sinn der kleinen Kinder auf das Besondere geht.

Zweite Uebung.

Nachmachen und Benennen der Grundflächen.

§. 5. Grundflächen. Ein gleichseitiges Dreiekk (Bild 18), gleichschenklige Dreiekke (19,

a, b, c), ungleichseitige (20, a, b, c), ein Geviert (21), ein Rechtekk (22), eine Raute (23), eine Schrägraute (24), ein Fünfekk (25), ein Sechsekk (26), ein Achtekk (27), ein Kreis (28), ein Langrund (29), ein Eirund (30), ein Halbkreis (31), ein Viertelkreis (32).

Bemerkung. Diese vorstehenden Grundflächen hat der Lehrer alle vorräthig in der Schule, und wo möglich mehrfach und von verschiedener Größe. Am leichtesten schneidet man dieselben aus Pappe; Tischler können sie aus Holz verfertigen, Klempner aus Blech und Kammmacher aus Horn. Die blechernen haben den Vorzug.
Für die Freunde undeutscher Namen sei hier noch Folgendes bemerkt: Ein Dreiekk heißt auch Trianael, ein Geviert Quadrat, ein Rechtekk Oblongum oder Rectangulum, eine Raute Rhombus, eine Schrägraute Rhomboides, ein Kreis Cirkel.

Anweisung. Der Lehrer vertheilt die Flächen unter die Schüler, welche mit Schiefertafel und Stift versehen sind; jeder Schüler empfängt mit der Fläche den Namen derselben, und legt die Fläche auf seine Tafel, um sie zu umziehen, und so sie also, dekkend, abzuzeichnen. Der Lehrer sieht nach, ob es gegangen ist, fragt nach dem Namen, trägt diesen auch über auf das Bildwerk des Schülers, und giebt dem Schüler, wenn er den Namen behalten hat und die Abzeichnung nicht übel ausgefallen ist, eine andere Fläche. Mancherlei Fragen und Sinnenaufklärungen sind hier an Ort und Stelle; als: das Dreiekk hat drei Ekken, das Fünfekk fünf u. s. w. Zum Dreiekk gehören 3 Striche, zum Rechtekk 4 u. s. w. Im gleichseitigen Dreiekk sind alle Striche gleich lang, im gleichschenkligen 2 Striche, im ungleichseitigen alle drei Striche ungleich lang. Ja, man kann auch hierbei schon die Unterscheidung von rechten, stumpfen und spitzen Winkeln mitnehmen, und fragen, welche dieser Winkel kommen in den verschiednen Flächen vor?, und deshalb auch die gleichschenkligen und ungleichseitigen Dreiekke, in Rechtwinklige, spitzwinklige und stumpfwinklige (siehe zweiten Abschnitt, zweite Uebung) eintheilen. — Haben die Schüler alle vor-

stehenden Grundflächen durchgezeichnet, so lässt man solche an den vorhin gehabten Körpern aufsuchen, die zu diesem Behuf alle vorgenommen werden, wobei denn auch beiläufig eine Wiederholung ihrer Namen stattfindet. Man kann auch Körper auf die Tafel legen und so dekkende Flächen abzeichnen lassen. Unterhaltender und auch noch belehrender ist es aber, die Schüler dieselben Flächen mehrmals neben einander, oder auch queer über einander, oder ungleichartige Flächen neben und übereinander legen und abzeichnen zu lassen. Dies ist zugleich bildend für den Zeichenunterricht. Am Schluss dieser Uebung lässt man in der Schule an Tisch und Bänken, Thüren, Fenstern, Wänden, am Fußboden und am Ofen allerlei bekannte Flächen aufsuchen. Werden die Schüler auf unbekannte aufmerksam, so benennt der Lehrer ihnen auch diese. Da bei der ersten Uebung die Selbstthätigkeit der Schüler weit weniger in Anspruch genommen wird, als bei der zweiten, und die Abwechselung für kleinere Kinder gut ist; so kann man auch Uebung 1 und 2 neben einander betreiben, so dass die erste halbe Stunde angeschaut, die zweite abgezeichnet wird.

Dritte Uebung.

Auffassen und Benennen der Grundrichtungen.

§. 6. Richtungen zur Erde. Wir können stehen, sitzen oder liegen; laufen, gehen, springen u. s. w. In jedem Falle ist das, was über dem Kopfe liegt, oben, was an den Füßen sich befindet, unten; in der Stube z. B. ist die Dekke oben, der Fußboden unten; im Freien die Erde unten, der Himmel oben; auf dem Kahn der Kahn mit dem Wasser unten, der Himmel oben; im dikken Walde die Erde unten, das Laub der Bäume oben. Wohin unser Auge sieht, das ist vorn, wohin der Rükken steht, hinten; was zur rechten Hand liegt, rechts, und was zur linken Hand sich befindet, links. Stehen wir, so

ruhen wir auf einer Stelle; wir können von dieser Stelle nach einer andern gehen; diese kann von uns liegen rechtswärts, linkswärts, vorwärts, rükkwärts. Liegt die Stelle höher, z. B. in einem andern Stokkwerk oder auf einem Berge, so gehen wir aufwärts; liegt sie niedriger, z. B. im Thalgrunde oder im Keller, so gehen wir abwärts. Wir können auch die Hände oder die Füße nach diesen sechs Richtungen bewegen, nämlich rechts, links, vorwärts, rükkwärts, auf, ab. — Gehen wir oder bewegen wir unsere Hand, so kann dies geschehen in grader Richtung, oder in Krümmungen mancherlei Art. Will man von einem Ort zum andern, so ist der gradeste Weg der nächste. — Bewegt man die Hand genau von oben nach unten in der Richtung, wie die Bäume in der Regel wachsen, und wie das Maurerloth fällt, so macht man die senkrechte (seigere, lothrechte) Richtung. Die Lage, welche das ruhige Wasser oder der ebene Wagebalken hat, nennt man die wagerechte (sölige, wasserrechte). Bewegt man die rechte Hand von links unten nach rechts oben, so steigt die Richtung rechts; bewegt man dieselbe Hand von rechts unten nach links oben, so steigt sie links. Bewegt man die Hand von rechts oben nach links unten, so fällt die Richtung links; bewegt man aber die Hand von links oben nach rechts unten, so fällt die Richtung rechts. Alle links und rechts steigenden und fallenden Richtungen sind schräg, weder senkrecht noch wagerecht.

Bemerkung. Der Mensch geht bei allen räumlichen Bestimmungen in der Regel von sich aus, wie man z. B. auch aus der Abnahme der Maaße von seinem Körper sieht. Darum ist hier auch die Bestimmung des Oben und Unten von seinem Standpunkte ausgemacht. Will man unabhängig von ihm das Oben und Unten bestimmen, so wird dadurch die Lage der Körper in der gedachten Linie vom Himmel zum Mittelpunkt der

Erde angegeben. Der von zwei Körpern, welcher auf dieser Linie dem Mittelpunkt der Erde näher ist, als ein anderer, liegt unten, und jener dann oben.

§. 7. Richtungen zu einander. Gehen zwei oder mehrere Schüler genau hinter einander, so gehen sie in einer Richtung. Gehen mehrere Schüler gleichmäßig neben einander, so gehen sie in gleichlaufenden; entfernen sie sich von einander, in abgeneigten, nähern sie sich zu einander, in zugeneigten Richtungen. In beiden letztern Fällen können sie nicht in einer und auch nicht in gleichlaufenden Richtungen sein. Werden die Richtungen auf dem Papier angegeben, so nennt man ihre Enden Endpunkte. Man kann Punkte in mannigfaltiger Stellung zu einander setzen, so daſs sie Dreiekke, Vierekke u. s. w. bilden.

Anweisung zu §. 6 und 7. Das Vorstehende ist Alles in der That auszuüben, und dadurch zu erlernen. Die Kinder befinden sich dabei auf einer freien Stelle in der Schulstube, oder ist diese nicht vorhanden, und erlaubt es die Schulordnung, auf einem freien Platz, oder geht dies nicht, so müssen sie auf Tischen und Bänken stehen. Am besten, es befinden sich alle in einem Gliede, oder in 2 Gliedern; und es werden zuerst alle Ruharten durchgemacht, entweder nur so, daſs es einer dem andern vormacht, oder so, daſs es alle auf Rufworte zugleich machen. Darauf kann man auch mehrere Fortbewegungsarten durchnehmen, als: Gehen, Hüpfen, Springen u. s. w. Indeſs, wo der Raum beengt ist, oder wo anderweitige Engungen stattfinden sollten, muſs man sich auf das mündliche Durchgehen beschränken. Haben die Kinder den Gegensatz von Ruhe und Bewegung aufgefaſst, so läſst man die sechs erwähnten Richtungen zeigen, mit der rechten und mit der linken Hand auf Rufworte, und, erlaubt es der Raum, die vier gehbaren auch gehen. Der Lehrer läſst die Stellungen der Schüler einige Mal verändern, und jedes Mal angeben, was in der neuen Stellung jedes gerade vor sich habe, über sich, unter sich, rechts und links. Sind die Kinder sehr reg-

sam, so kann man auch die Zwischenrichtungen zeigen lassen, z. B. rechts oben, vorwärts oben, links oben, rechts unten, vorwärts unten, links unten. —

Auf die möglichen Richtungen der Bewegung folgen die Formen der Bewegungen. Man lässt einen oder mehrere Schüler von einem Ort zum andern gehen, sie werden in der Regel den geradesten Weg nehmen, darauf geht der Lehrer auch dahin, und nimmt einen sehr krummen Weg, und lässt so es mannigfaltig anschauen, dass es grade und krumme Wege gibt, und dass der geradeste Weg der nächste ist. Zur Veranschaulichung der senkrechten und wagerechten Richtung bringt der Lehrer einen Faden mit einem schweren Körper als Senkloth, so wie eine Schale Wasser in die Klasse. Er lässt mit den Händen vorwärts, rechtswärts und linkswärts die senkrechte und die wagerechte Richtung streichen, und darauf alle vier angegebenen schrägen. Es geht dies gut auf Befehlsworte, z. B. streicht rechts steigend, streicht vorwärts wagerecht, links wagerecht u. s. w.! Sind diese so wichtigen Richtungen aufgefasst, so holt man von Neuem die Grundkörper hervor, und lässt an ihnen alle Flächen in dieser Hinsicht untersuchen, nämlich, ob sie senkrecht, wagerecht oder schräg liegen. Von den Grundkörpern geht man über zu der Stube und den darin befindlichen Sachen, die man auf dieselbe Weise behandelt. Diese ganze so wichtige Uebung schließt mit dem Auffassen des Verhältnisses, worin zwei Richtungen zu einander stehen können. Der Schüler gewinnt die Anschauung dieser Verhältnisse durch das Gehen Mehrerer hinter einander, neben einander, zu einander und von einander. Sollte der Schulraum dies nicht gestatten, so kann man sich auch hierzu schon der Striche an der Tafel bedienen (Zeichn. 33 a, 34, 35). Das Aufsuchen aller gleichlaufenden Striche und Flächen an den Grundkörpern und an andern Körpern in der Stube schließt sich hieran an, und das Stellen der Punkte nach gegebenen Bedingungen, als zu Dreiekken, Vierekken, Kreisen u. s. w. beendet die Uebung. Dieses Punktsetzen übt sehr das Auge der Schüler, und ist darum gar nicht als bloße Nebensache zu betrachten.

Bemerkung. Dieser erste Abschnitt enthält in den drei Uebungen die Grundlage aller Raumlehre, Betrachtung von Körpern, Flächen und Richtungen (Strichen). Dem Gewöhnlichen entgegen haben wir mit Körpern angefangen, weil Flächen und Richtungen erst ihre Bedeutung durch Körper erlangen.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Betrachtungen und Bildungen.

Erste Uebung.

Auftragen der Striche und Winkel.

§. 8. Grader Strich und Kreisstrich. Durch Hülfe eines Richtscheites (einer Schiene — eines Lineals) kann man leicht grade Striche ziehen, gleichlaufend mit dem obern Tafelrand, mit dem Seitenrand, rechts steigend, links steigend, gleichlaufend unter sich in einer Richtung, (33 a), neigend (35) u. s. w. Mit einem Zirkel kann man leicht die Abstände zwischen zwei Strichen und Punkten abmessen, und auch Striche, die entfernt von einander liegen, gleich lang machen. Hat man keinen Zirkel, so lässt sich dies auch mit einem Faden, einem Papierstreifen, einem Stökkchen und einem Lineal machen, an denen man sich genau die Abstände bemerkt. Mit einem Zirkel macht man sehr leicht Kreise, in dem der eine Schenkel fest steht, der andere sich umdreht. Je weiter die Schenkel aus einander sind, desto größer wird der Kreis. Der Punkt, welcher mitten im Kreise steht, heißt der Mittelpunkt (das Centrum) und der Grenzstrich der Kreisfläche der Umkreis (die Peripherie). Mehrere Kreise um einander können einen einzigen Mittelpunkt haben; die Kreisstriche oder Umkreise sind denn zu einander gleich-

laufend. Bewegt sich ein Punkt um einen andern gleichmäßig herum, so läuft er in einer Kreisbahn (36). Der Kreisstrich oder die Peripherie kann in einzelne gleiche oder ungleiche Stükke getheilt werden, welche Bogen (Kreisbogen — Arcus) heißen (40 u. 47). Ein grader Strich, den man von einer Stelle des Kreisstriches (des Umkreises) zu einer andern durch den Mittelpunkt zieht, heißt ein Kreisdurchmesser (Diameter) (36 a b); die Hälfte davon ein Strahl (Radius) oder ein Halbmesser (36 a c oder c b). Der Halbmesser ist so lang, als die beiden Spitzen des Zirkels von einander entfernt stehen, mit denen er gemacht ist. Jeder grade Strich, welcher zwei Punkte desselben Kreisstriches verbindet und dadurch zugleich einen Bogen abschneidet, heißt eine Sehne (Chorde) (91 F A u. A B). Der Theil einer Kreisfläche, welcher von einer Sehne und den durch sie abgeschnittenen Bogen begränzt ist, heißt ein Kreisabschnitt (Segment) (91) und der Theil einer Kreisfläche, welcher sich zwischen zwei Strahlen und dem Bogen zwischen ihnen befindet, ein Ausschnitt (Sector) (147 A B C).

Bemerkung. Hat man keinen Zirkel, so kann man auch Kreise mit einem Faden machen, oder mit einem Stökkchen, indem man das eine Ende von einem gewählten Punkt nicht fortrükken lässt, während das andere, woran etwas Schreibendes oder Ritzendes angebracht ist, um den festen Punkt bewegt wird und den Umkreis bildet.

§. 9. Winkel, Nebenwinkel, Scheitelwinkel. Wenn zwei geneigte Striche sich berühren, so bilden sie einen Winkel. Die beiden Striche heißen dann Schenkel (Crura) des Winkels, und der Punkt der Berührung der Winkelpunkt oder Scheitelpunkt, die Spitze (Vertex); z. B. bei Zeichn. 37 sind die Striche c a und d b verlängert, so daß sie sich in e vereinigen und den Winkel b e a bilden, dessen Winkel-

oder Scheitelpunkt e ist, und dessen Schenkel e b und e a heißen. Stößt ein Strich auf die Seite eines andern, wie bei Zeichn. 38, so entstehen Nebenwinkel. Bei Nebenwinkeln gehört ein Schenkel (hier e c) zu beiden Winkeln, und Nebenwinkel haben einen gemeinsamen Winkelpunkt (hier e). Durchschneiden sich zwei Striche, so entstehen vier Winkel mit einem gemeinsamen Winkelpunkt. Die entgegengesetzten Winkel werden in diesem Verein Scheitelwinkel genannt; z. B. bei 39 sind a d und c b Scheitelwinkel; dagegen c d, d b, b a und a c Nebenwinkel.

§. 10. Rechte, spitze, stumpfe Winkel. Winkel, deren Schenkel nicht weit von einander stehen, heißen spitze (enge) Winkel, und die, deren Schenkel weit von einander liegen, stumpfe, (weite). Gleiche Nebenwinkel (41) und gleiche Scheitelwinkel mit gleichen Scheitelwinkeln (42) sind nicht spitz und nicht stumpf, sondern ins Mittel, und heißen rechte Winkel. Es giebt also spitze, (enge, 43), stumpfe, weite, 44) und rechte (45) Winkel. Die spitzen und stumpfen Winkel heißen, im Gegensatz zu den rechten, schiefe (oblique) Winkel.

§. 11. Verhältniss von Winkel und Kreis. Wenn man von dem Mittelpunkt eines Kreises Striche zu dem Umkreis zieht, so erhält man Winkel, die durch einen Bogen geschlossen sind. In dem Kreis 40 sind 6 Winkel, nämlich b a f, f a e, e a d, d a c, c a v, v a b, und jeder ist durch einen Kreisbogen geschlossen. Die stumpfen Winkel haben lange Bogen, die spitzen kurze. b a f ist der stumpfeste Winkel, und hat den größten Bogen, b a v ist der spitzeste Winkel, und hat den kürzesten Bogen. In einem Kreis können nur 3 stumpfe Winkel (50) nur 4 rechte (46), aber viele spitze (47) liegen. Jeder rechte Winkel wird durch einen Viertelkreis geschlossen; denn man mag den Kreis noch so

groß und noch so klein machen, es gehen immer grade vier rechte Winkel hinein. Die Länge der Schenkel erweitert die Winkel nicht, und die Kürze verengt sie nicht. Die Weite und Enge — Stumpfheit und Spitzigkeit — der Winkel hängt allein von der Neigung der Schenkel zu einander ab. Alle rechte Winkel müssen gleich weit und gleich eng, also gleich groß sein; allein spitze und stumpfe Winkel sind sehr verschieden. Die Außenseite des Winkels, oder die hervorspringende Seite pflegt man eine Ekke zu nennen. Jeder Ekke am Mittelpunkt eines Kreises liegt ein Bogen zugekehrt, der größer als ein Halbkreisstrich ist. Theilt man die Ekke in zwei gleiche Winkel, so ist jeder größer als ein rechter. Alle Winkel, die auf einem Strich, an einem Punkt liegen, z. B. alle Winkel, die bei 48 auf dem Strich a b liegen, werden von einem Halbkreisstrich eingeschlossen, betragen also 2 rechte Winkel. Zwei Nebenwinkel (38) betragen darum ebenfalls 2 rechte, und alle Winkel um einen Punkt (46, 47, 40, 50, 39, 42) müssen 4 rechte betragen, wenn man sie eins ins andere rechnet.

§. 12. Bildung des rechten Winkels. Zur Zeichnung eines rechten Winkels bedient man sich eines Winkelhakens,*) oder der rechtwinkligen Ekke des Richtscheites, legt eines von beiden auf die Tafel oder aufs Papier und zieht beide Kanten entlang. Will man genauer verfahren, so schlägt man einen Kreis, zieht durch den Mittelpunkt einen Durchmesser, und theilt die dadurch entstandenen Halbbogen, vermittelst des Zirkels, in Viertelbogen; die Theilpunkte verbindet man mit dem Kreismittelpunkt, und erhält vier rechte Winkel. Man braucht auch gar nicht einen Kreis zu machen, son-

*) Der Winkelhaken besteht aus 2 rechtwinklig zusammengefügten Linealen, oder aus einem Dreiekk mit einem rechten Winkel. Die Handwerker haben solche Winkelhaken häufig aus Eisen.

dern nur einen Halbkreis über einen Strich, und den zu theilen. — Stehen 2 Striche so zu einander, dass sie einen rechten Winkel bilden, so stehen sie winkelrecht oder rechtwinklig. So steht (Zeich. 45) b a winkelrecht auf a c, und so liegen Zeich. 41, 42 und 46 je zwei grade Striche winkelrecht zu einander. Vereinigt sich ein senkrechter Strich mit einem wagerechten, so geschieht dies jedes Mal in einen rechten Winkel; aber auch zwei schräge Striche können sich zu einem rechten Winkel vereinigen.*) Grade stehende Bäume, senkrechte Mauern, Häuser und Thürme stehen winkelrecht zur Erde, die dabei als ebne Fläche gedacht wird. — Die Tafel oder das Papier, worauf man zeichnet, werden wohl so betrachtet, als ständen sie auf einer Kante, oder als hingen sie an der senkrechten Wand; und bei dieser Betrachtung ist es nicht falsch, die Striche, die mit dem Seitenrande der Tafel gleichlaufen, senkrecht, und die, welche mit dem obern und untern Rand gleichlaufen, wagerecht zu nennen. Zieht man also einen Strich gleichlaufend mit dem obern Tafelrand und einen mit dem Seitenrand, so müssen beide bei ihrer Berührung einen rechten Winkel bilden. — Eine andere Art, einen rechten Winkel zu machen, ist die durch kreuzende Kreisbogen. Will man z. B. Zeich. 78 an x, dem Endpunkt des Striches x a einen rechten Winkel bilden, so verlängert man von x aus x a so weit, dass x i = x a ist. Mit einer beliebigen, aber selbigen Zirkeleröffnung beschreibt man von i und a aus Kreisbogen über oder unter i a, wie es einem am bequemsten ist, und den Durchschnittspunkt, hier entweder b oder d verbindet man mit x; so muss b x a oder d x a ein rechter Winkel sein.

---

*) Manche Mathematiker erlauben es sich, statt dem Ausdrukk winkelrecht, oder rechtwinklig, ohne Weiteres den Ausdrukk senkrecht zu gebrauchen. Ich kann nicht dafür sein; wenn gleich ich nicht verkenne, dass auch einige Gründe dafür sind.

§. 13. Nachbildung eines Winkels. Ein beliebiger stumpfer oder spitzer Winkel lässt sich ohne alle Umstände machen; man braucht nur mittelst des Lineals einen Strich zu ziehen, und daran in einem Winkel, der kleiner oder größer ist als ein rechter, einen andern Strich anzusetzen. Ob der Winkel kleiner oder größer ist, als ein rechter, das sieht das Auge. Allein soll man einen spitzen oder einen stumpfen Winkel machen, der so groß ist, als ein gegebener, so muss man schon mit mehr Kunst verfahren. Hat man den Winkel aor (Zeich. 50) erhalten, und soll man einen eben so großen Winkel machen, so zieht man vom Mittelpunkt o aus einen Kreis, der so groß ist, dass er beide Schenkel des gegebenen Winkels berührt oder durchschneidet. Darauf misst man den Kreisbogen, hier ar, mit dem Zirkel, und macht den Bogen as eben so groß. Den Punkt s verbindet man mit o, und der Winkel soa ist so groß, als der Winkel roa. Will man den Winkel nicht neben dem gegebenen haben, so muss man zwei gleiche Kreise machen. Ist z. B. (Zeich. 147) der Winkel ABC gegeben, und soll an den Punkt b ein gleicher Winkel angetragen werden, so beschreibt man von b aus einen gleichen Kreis, und macht ac = AC, so muss $\angle abc = \angle ABC$ sein. Soll man einen Winkel noch ein Mal so groß machen, als der gegebene ist, so nimmt man den Bogen noch ein Mal so groß, und soll man den Winkel nur $\frac{1}{2}$ Mal so groß machen, als der gegebene ist, so nimmt man die Hälfte des Bogens.

§. 14. Bildung gleichlaufender Striche. Will man gleichlaufende Striche ziehen, so muss man das Lineal stets so legen, dass es mit seinem Rande überall gleich weit von dem gezogenen Striche absteht. Steht es nur an beiden Enden gleich weit vom Striche ab, so muss der darnach zuletzt gezogene Strich überall gleich weit von dem früher gezogenen abstehen. Vermit-

telst eines Zirkels kann man sich die gleichen Abstände abmessen. Will man z. B. (Zeich. 22) einen Strich gleichlaufend mit ab ziehen, so bezeichnet man sich mit gleicher Zirkelöffnung von a aus c und von b aus d und zieht durch beide Punkte den Strich cd. Bei diesem Abpassen muss man aber dahin sehen, dass es in rechten Winkeln geschieht. Man thut daher wohl, wenn man an a und b rechte Winkel trägt, so dass ac und bd rechtwinklig auf ab stehen, und dann auf diesen Schenkeln die gleiche Entfernung ac und bd abpasst. Man kann auch an c, statt an b, den rechten Winkel antragen, und den von c aus gemachten neuen Schenkel (cd) beliebig verlängern, so muss der gleichlaufend mit ab sein.

Bemerkung. Der Schüler bedarf jetzt ein Lineal und einen Zirkel. Das erstere ist gewöhnlich von Holz; besser von Eisen. Man kauft metallene Zirkel zu $2\frac{1}{2}$ Sgr. Im Fall der Noth bilden Daumen und Zeigefinger eine Art Zirkel. Ein Faden mit einem daran befestigten Stift thut auf der Schiefertafel gute Dienste, wenn kein andres Werkzeug vorhanden ist; der Faden wird an einem Ende fest gehalten, während das andere Ende mit dem Griffel umkreist. Haben die Schüler messingene Zirkel, so lässt man sie die Kreise auf das Papier machen, indem die Zirkelspitze eindrückt. Kommt das Papier zu hoch für die Schüler, so halte man darauf, dass die Kreise nicht zu stark auf die Schiefertafeln eingeritzt werden. Zirkel mit einem Hülsenschenkel, in welchen man einen Schieferstift einschrauben kann, sind die besten. Um Manches an der großen Tafel zu zeigen, gebraucht der Lehrer einen Stangenzirkel. Das nutzbarste Lineal für Kinder ist $1\frac{1}{2}$ Zoll breit, $\frac{3}{4}$ Fuß lang. Es hat an dem einen Ende genau zwei rechte Winkel, an dem andern einen spitzen Winkel, der $\frac{1}{2}$ rechter, und einen stumpfen, der $1\frac{1}{2}$ rechter ist, und dient so mit als Winkelmaaß. Auf der einen Fläche ist es glatt und an einem Rande ausgekehlt, auf der andern befindet sich ein Maaßstab, doch so angebracht, dass die Scheitkanten frei bleiben. Weil die Schüler nothwendig einen Maaßstab in Zukunft gebrauchen, so ist es zweckdienlich, den auf eine einfache Weise wo an-

zubringen. Haben die Schüler schon andere Lineele, so kann man ihnen den Maaßstab auch auf einen Papierstreifen, einen Lederstreifen oder auf einen gewöhnlichen Stokk machen. Je bessere Hülfsmittel man haben kann, desto besser ist es; allein auch bei den allerschlechtesten Hülfsmitteln muss man das Gehörige thun.

In Absicht der Winkelbezeichnung auf dem Papier ist noch zu bemerken, dass man den Winkel entweder durch einen Buchstaben, zwischen die Schenkel an den Winkelpunkt gesetzt, bezeichnet, oder durch drei Buchstaben, wovon der erste und letzte an den Schenkelenden, der mittlere an dem Winkelpunkt außerhalb der Schenkel steht.

Anweisung. Diese Uebung fängt damit an, dass der Lehrer den Kindern zeigt, wie sie das Lineal anlegen, wie sie es halten, den Griffel ansetzen, und, gleichmäßig ihn haltend, an dem Rande des Lineals hinstreichen. Zur Einübung lässt man nach allen Richtungen grade Striche ziehen, und zwar mehrere gleichlaufend. Hat man Striche nach allen Richtungen ziehen lassen, so nehme man den Schülern die Lineale, und lasse solche Striche aus freier Hand ziehen, — eine nicht leichte Uebung, die man indess hier nicht zu hoch anschlagen muss, weil sie mehr in den Zeichenunterricht gehört. Man mache die Schüler darauf aufmerksam, dass man beim Strichezeichnen aus freier Hand mehr muss auf den Punkt sehen, zu dem man will, als auf den, von welchem man kommt. Bei dem Kreisschlagen muss man die Schüler darauf aufmerksam machen, dass ja der eine Schenkel fest stehen muß, und daß der andere nicht ausfahren und nicht eingehen darf, während er den Umlauf macht. Kreise aus freier Hand zeichnen zu lassen, das möchte noch schwerlich gelingen. Dagegen ist es unerlasslich, dass, wenn alle Winkel in allen möglichen Lagen auf der Tafel, vermittelst des Lineals, gezeichnet sind, dass sie auch ohne alle Hülfsmittel in allen Lagen gezeichnet werden, und das als einfache Winkel, als Nebenwinkel und Wechselwinkel. Den rechten Winkel zumal müssen die Kinder alle genau in Hand und Auge haben. Liegen seine Schenkel nicht gleichlaufend mit den Tafelrändern, so irren die Kinder sehr leicht bei ihm. Dass die Winkel durch Verlängerung der Schenkel nicht wachsen, das will

zuerst den Schülern gar nicht einleuchten. Lässt man aber nicht nach, bedient man sich zweier Stifte als Hülfsmittel, und zeigt, wie ihre Näherung und Entfernung nur die Größe des Winkels macht; zeichnet man Winkel in um einander gezogene Kreise, und zeigt man stets, dass der Kreisbogen das wahre Maaß des Winkels sei, so kommen die Schüler allmälig dahinter. Das Machen der Winkel, die so groß als gegebene sind, ist tüchtig zu üben. Bei Allem, was hier vorkommt, gehen Machen und Auffassen stets neben einander. Der Lehrer gibt auf, sieht nach, erklärt, fragt u. s. w., und arbeitet so dahin, dass der Schüler alles hier Vorkommende weiß und machen kann.

Zweite Uebung.

Das Betrachten und Machen der Grundflächen.

I. Die Dreiekke.

§. 15. Das gleichseitige Dreiekk. In einem gleichseitigen Dreiekk sind alle Seiten gleich lang, und auch alle drei Winkel gleich spitz, wie sich dies aus den Bogen abnehmen lässt; denn bei 51 sind u c, i o und e a gleich lang. Will man ein beliebiges gleichseitiges Dreiekk machen, so nimmt man (siehe 51) einen beliebigen Strich, z. B. m n, fasst diesen in den Zirkel und beschreibt von m und n Kreisbogen, deren Durchschnittspunkt den dritten Winkelpunkt gibt. Will man ein gleichseitiges Dreiekk machen, das einem andern gleicht, so braucht man nur eine Seite gleich einer Seite des gegebenen Dreiekkes zu machen, und dann so verfahren, wie eben angegeben wurde.

§. 16. Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreiekk. In einem rechtwinklig-gleichschenkligem Dreiekk (19, a) befinden sich zwei kürzere gleiche Seiten und eine längere, zwei spitze (und wie man durch Kreisschlagen sehen kann) gleiche Winkel und

ein rechter. Will man ein rechtwinklig=gleichschenkliges Dreiekk bilden, so macht man zuerst einen rechten Winkel, gleichet beide Schenkel, und verbindet sie durch einen dritten Strich. Soll ein rechtwinklig=gleichschenkliges Dreiekk nachgebildet werden, so braucht man nur zu verfahren, wie eben angegeben ist, und die gleichen Schenkel genau so lang zu machen, als sie bei dem gegebenen Dreiekk es sind. Man kann auch zuerst die lange Seite abzeichnen, dann eine kurze Seite in den Zirkel fassen, und von den Enden der langen Seite damit sich durchschneidende Kreisbogen bilden, deren Durchschnittspunkt den dritten Winkelpunkt ausmacht.

§. 17. Das spitzwinklig=gleichschenklige Dreiekk. Ein spitzwinklig=gleichschenkliges Dreiekk (19, b und d) hat zwei gleich lange Seiten und eine ungleiche, eben so auch zwei gleiche, spitze Winkel und einen ungleichen. Die zwei gleich langen Seiten können einzeln kürzer (19, b) und länger (19, d) als die dritte Seite sein. Im ersten Fall ist der ungleiche Winkel der größte, im letzten der kleinste. Will man ein gegebenes Dreiekk dieser Art abzeichnen, so zeichnet man zuerst die ungleiche Seite, nimmt dann eine der gleichen in den Zirkel, und beschreibt damit über den gezeichneten Strich von seinen Endpunkten aus zwei sich durchschneidende Kreisbogen, die den dritten Winkelpunkt bilden (wie §. 15).

§. 18. Das stumpfwinklig=gleichschenklige Dreiekk. Dieses (19, c) hat zwei gleich lange kürzere und eine ungleiche, längere Seite, bei einem stumpfen und zwei gleich großen spitzen Winkeln. Ein stumpfwinklig=gleichschenkliges Dreiekk wird auf ähnliche Weise gemacht, wie das spitzwinklig=gleichschenklige (§. 16 und 17).

§. 19. Das rechtwinklig=ungleichseitige Dreiekk. Dieses (20, a) hat drei ungleiche Seiten und

drei ungleiche Winkel, wovon der eine ein rechter ist, während die zwei übrigen spitz sind. Will man ein solches abzeichnen, so muſs man zuerst eine Seite abzeichnen, und dann nach einander die zwei andern Seiten in den Zirkel nehmen, und von den Enden der ersten Seite damit Kreisbogen schlagen, deren Durchschnittspunkt den dritten Winkelpunkt ausmacht; oder man muß einen rechten Winkel bilden, die Schenkel ungleich machen, und ihre Enden mit einander verbinden.

§. 20. Das stumpfwinklig-ungleichseitige Dreiekk. Dieses (20, b) hat drei ungleiche Seiten und drei ungleiche Winkel, wovon einer stumpf ist.

§. 21. Das spitzwinklig-ungleichseitige Dreiekk. Dieses (20, c) hat drei ungleiche Seiten und drei ungleiche, spitze Winkel. Diese beiden letzten Dreiekke werden so nachgemacht, wie das rechtwinklig-ungleichseitige (§. 19), nämlich durch Kreisbogenschneiden. Das spitzwinklig-ungleichseitige erhält man am sichersten, wenn man ein gleichseitiges zeichnet, und in diesem einen Strich zieht, der den einen Winkel etwas vergrößert (ohne daſs er ein rechter wird) und den andern etwas verkleinert.

Jedes Dreiekk kann, wie aus §§. 15—21 erhellet, am einfachsten nachgemacht werden, wenn man eine Linie gleich macht einer Seite des Dreiekks, und von deren Endpunkten mit Zirkelöffnungen, die den beiden andern Seiten gleich sind, sich durchschneidende Kreisbogen bildet, deren Durchschnittspunkt den dritten Winkelpunkt ausmacht.

§. 22. Verhältniſs zwischen Winkel und Seiten in den Dreiekken. In allen sieben Dreiekken (und mehrere gibt es nicht) kommen wenigstens zwei spitze Winkel vor, und es trifft sich in allen Dreiekken, daſs jedesmal gleichen Seiten auch gleiche Winkel

gegenüber stehen, und den größern Seiten die größern Winkel, so wie den kleinern Seiten die kleinern Winkel.

II. Die Vierekke.

§. 23. Das Geviert. Ein Geviert (Quadrat) (21) ist ein Vierekk, oder vierseitiges Polygon mit vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln. Die Seiten desselben laufen paarweis gleich. Ein Geviert entsteht dadurch, dass 2 Paar gleichlaufende, gleich weit entfernte Striche sich in rechten Winkeln durchschneiden (52). Es wird gemacht und nachgemacht durch gehörige Antragung von rechten Winkeln und Gleichung der Seiten. Man braucht nur 2 Winkel richtig antragen; so muss sich das Andre von selbst finden. Soll man z. B. (Zeich. 21) a b c d nachmachen, so trägt man zuerst Seite a b auf, und errichtet dann an beiden Enden dieser Linie rechte Winkel; die neuen Schenkel a c und b d macht man so lang als a b, die Endpunkte c d werden endlich, ohne alle Winkelmessung, verbunden, und das Geviert ist richtig abgetragen.

§. 24. Das Rechtekk. Ein Rechtekk (Rectangel oder Oblongum) (22) ist ein Vierekk mit vier rechten Winkeln und gleichlaufenden Seitenpaaren, die nicht gleich lang sind. Durchschneiden sich 2 Paar gleichlaufende Striche, deren Abstand ungleich ist, in rechten Winkeln, so muss ein Rechtekk sich bilden. Bei dem Nachmachen eines Rechtekkes muss man 2 Seiten richtig abpassen. Soll z. B. (Zeich. 22) a b c d abgezeichnet werden, so trägt man die Seite c d ab, macht an ihren Enden rechte Winkel, deren neue Schenkel genau so lang als a c und b d sein müssen. Ohne Weiteres werden darauf die Punkte a b verbunden, und das Rechtekk ist richtig abgetragen.

§. 25. Die Raute. Eine Raute (Rhombe) ist auch ein Vierekk. (Zeich. 23.) Es hat, gleich dem Qua-

drat, vier gleich lange Seiten, die auch paarweis gleichlaufen; und weicht dadurch vom Quadrat ab, dass es nicht vier rechte Winkel besitzt, sondern zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe. Macht man mehrere Rauten, so sieht man bald, dass, je spitzer die spitzen Winkel sind, desto stumpfer auch die stumpfen sein müssen. Durchschneiden sich (Zeich. 80) 2 Paar gleichlaufende Striche, die einen gleichen Abstand haben, in schräger Richtung, so ist die Raute ein Erzeugniss davon. Will man eine gegebene Raute nachzeichnen, so muss man eine Seite und zwei Winkel genau abpassen. Soll z. B. (Zeich. 23) die Raute a b c d nachgemacht werden, so trägt man zuerst einen Strich — hier ein Mal c d ab, und setzt an die Enden des abgetragenen c d, durch Hülfe der Kreise (§. 13), die Winkel b c d und c d a, die neuen Schenkel macht man so lang als c d, und verbindet ihre Endpunkte. Jedoch kann man auch auf eine kürzere Weise verfahren, indem man von einer beliebigen Ekke zu der entgegengesetzten einen Strich zieht, so die Raute in zwei gleiche Dreiekke zerlegt, und diese, wie §. 21 angegeben ist, abträgt. — Bekommt man die Aufgabe, eine Raute zu machen, in der ein gegebner Winkel zwei Mal vorkommen soll, z. B. (Zeich. 38) der Winkel c e b, so zieht man zu diesem Winkel den Nebenwinkel, hier a e c, und kann überzeugt sein, dass dieser Nebenwinkel der ist, welcher neben dem gegebnen auch zwei Mal vorkommen muss. Trägt man also den gegebnen Winkel und dessen Nebenwinkel an eine Seite, macht die Schenkel so lang, als die angenommene Seite, und verbindet deren Endpunkte durch die vierte Seite, so ist die geforderte Raute mit dem gegebnen Winkel da.

§. 26. Die Schrägraute. Eine Schrägraute (Rhomboide) (Zeich. 24) ist gleichfalls ein Viereck und gleicht darin dem Rechtekk, dass nur die gleichlaufenden Seiten gleich lang sind, und darin der Raute, dass es

stumpfe und spitze Winkel hat. Es entsteht dadurch, dass zwei Paar gleichlaufende Striche, deren Abstand ungleich ist, sich in schiefen Winkeln durchschneiden. Beim Auftragen hat man zwei Seiten und zwei Winkel abzupassen; sonst verfährt man dabei auf ähnliche Weise, wie bei der Raute. Die vier vorstehenden Vierekke pflegt man wohl die regelmäßigen zu nennen, oder die spätigen (Parallelogramme), weil bei ihnen durchweg Gleichlauf der Seiten stattfindet.

§. 27. Ein halb regelmäßiges Vierekk. Dieses (Zeich. 53) auch Trapez genannt, hat nur zwei gleichlaufende Seiten.

§. 28. Ein ganz unregelmäßiges Vierekk. Dieses (Zeich. 54) auch Trapezoide genannt, hat gar keine gleichlaufenden Seiten. Eine eigne Abart von diesem ist das mit dem einspringenden Winkel (55). Bei Auftragung aller halbregelmäßigen und unregelmäßigen Vierekke muss man jede einzelne Seite und jeden einzelnen Winkel abpassen. Wollte man z. B. (Zeich. 55) a b c d abtragen, so trüge man zuerst a b ab, setzte an die abgetragene Seite die Winkel b a d und a b c, und machte die neuen Schenkel so groß als a d und b c. An die Enden dieser Schenkel müssten darauf die Winkel b c d und c d a getragen werden. Es ist aber nur nöthig, den einen Winkel anzutragen, hier ein Mal c d a, und den neuen Schenkel zu verlängern, weil derselbe von selbst nach c hintreffen muß.

III. Die Vielekke.

§. 29. Ein regelmäßiges Fünfekk. Dieses (Zeich. 25) hat fünf gleich lange Seiten und fünf gleich stumpfe Winkel. Man verfertigt es am leichtesten, in dem man einen Umkreis macht, diesen abpassend in fünf gleiche Theile theilt, und die Theilungspunkte durch grade Striche verbindet. Hat man eins so richtig zu

Stande gebracht, so ist es leicht, ein anderes von gleicher Größe darnach zu machen, indem man einen gleichen Umkreis zieht und diesen ebenfalls in fünf gleiche Theile theilt.

§. 30. Ein regelmäßiges Sechsekk. Dieses (Zeich. 26) lässt sich weit leichter machen, als ein regelmäßiges Fünfekk. Man braucht nur einen Kreis zu machen, und den Strahl sechs Mal (was grade passt) auf dem Umkreis herum zu tragen, so bilden die Theilungspunkte die Ekken des Sechsekkes. Setzt man sechs gleiche gleichseitige Dreiekke um einen Punkt zusammen (Zeich. 56), so hat man auch ein regelmäßiges Sechsekk. Im regelmäßigen Sechsekk sind gleichfalls alle Seiten und alle Winkel gleich, und die Seiten paarweis gleichlaufend. Will man ein regelmäßiges Sechsekk von gleicher Größe mit einem gegebnen machen, so braucht man nur einen Kreis mit einer Seite des vorhandenen Sechsekkes zu machen, und dann so verfahren, wie angegeben ist.

§. 31. Ein regelmäßiges Achtekk. Dieses (Zeich. 27) hat acht gleiche Winkel und acht gleich lange Seiten, die paarweis gleichlaufend sind. Im Fünfekk sind die Winkel kleiner, denn im Sechsekk, in diesem kleiner, denn im Achtekk. Ein Achtekk kann, gleich dem Fünfekk, so gemacht werden, dass man abpassend sucht einen Umkreis in acht gleiche Theile zu theilen. Hat man erst einen Winkel, so kann man auch durch richtiges Winkelantragen und richtiges Ablängen der Striche das Achtekk zu Stande bringen. Am einfachsten aber macht man das Achtekk aus einem Geviert (57). Man theilt die Geviertseiten, und durchzieht sie mit Strichen, die den Geviertgeeren*) gleich sind. So ist hier das Geviert

*) Anmerk. Geeren oder Diagonalen sind Linien, welche auf einer regelmäßigen Fläche von einem Winkelpunkt zu dem entgegengesetzten gezogen werden, und so die Flächen hälften.

a b c d geschnitten durch die Striche e g und f h, welche beide Striche in der Art gleiche Länge mit den Geeren a d und b c haben, dass die Strahlen (Radien oder Speichen) k a, k e, k c, k h, k d, k g, k b, k f alle gleich sind. Die Enden der Durchschnittsstriche sind mit den Geviertekken verbunden. Auch kann man ein Achtekk bilden, indem man gleiche Scheitelwinkel errichtet, als ein Kreuz, und durch diese noch ein Mal gleiche Scheitelwinkel legt (58), so daß man um den Durchschnittspunkt k acht halbe rechte Winkel erhält. Man macht alle acht Winkelschenkel durch einen Zirkel gleich lang und verbindet ihre Enden mit einander, so hat man auch ein regelmäßiges Achtekk. Aus diesem erhellet schon, dass man auf mehrere Arten ein Achtekk bilden kann, das einem gegebnen gleich ist; man kann dies nämlich auf vier Arten:

1) durch einen gleichen Kreis;
2) durch Winkelantragen und richtiges Abmessen der Seiten;
3) durch ein gleiches Quadrat;
4) Durch gekreuzte Scheitelwinkel mit gleichen Schenkeln.

§. 32. Andere Vielekke. Alle übrigen regelmäßigen Ekke, als Siebenekke, Neunekke u. s. w. lassen sich durch Kreiseintheilungen am sichersten machen.

Anweisung. Die vorstehende Uebung hat es so recht eigentlich mit dem Auftragen, also mit dem Gebrauch von Zirkel und Lineal, zu thun. Sie wird so behandelt, dass der Lehrer Aufgaben gibt, nachsieht und nachmisst, ob sie richtig gelöst sind, erklärt, fragt, wiederholt, einübt, und so das Wissen und das Können stets mit einander erzielt. Bei Einübung der Wissensgegenstände kann er bisweilen auch zusammen sprechen lassen. Die Aufgaben sind von zweierlei Art, nämlich die, welche ein Machen, und die, welche ein Nachmachen beabsichgen. Zum Nachmachen kann man sich theils der Flä-

chen, die bei Uebung **II.** Abschn. **I.** gebraucht wurden, bedienen, theils der Flächen an den Grundkörpern, theils solcher, die man selbst an die große Tafel oder auf die kleinere Tafel der Schüler zeichnet. Die ausgeschnittenen Flächen und die an den Körpern lassen sich in der Regel schwerer nachbilden, weil man die Kreisbogen zur Winkelabtragung darauf nicht gut machen kann. Gewöhnlich und vorzüglich zu Anfang zeichnet der Lehrer daher selbst die Flächen, die abgezeichnet werden sollen, auf die Tafeln der Schüler, oder lässt sie unter einander sich solche Flächen vorzeichnen. Diese Uebung ist eine wahre Formen- oder Bildelehre, und gibt dem Schüler Fertigkeit und Geschicklichkeit. Sie führt in die Raumkunst. Wichtig bleibt es dabei, dass die Einsicht zugleich gewinnt. Die Schüler müssen am Ende dieser Uebung alles das wissen, was darin als Lehre vorgekommen ist, und es wird ihnen ein inneres lebendiges Wissen sein, da es aus der That gewonnen ward. Damit die Schüler sich nicht an Einseitigkeiten gewöhnen, so halte man darauf, dass die zu zeichnenden Flächen bald in dieser, bald in jener Lage gezeichnet werden. — Das Zeichnen aller vorgekommenen Flächen aus der freien Hand hat eigentlich nur als Zeichnen einen Werth. Hat der Lehrer Lust, dies mitzunehmen, so wird er immer etwas Heilsames treiben; doch, streng genommen, gehört es nicht hierher, sondern in den Zeichen-Unterricht.

Dritte Uebung.

Das genauere Betrachten der Grundkörper.

§. 33. Körpergränzen. Die äußern Gränzen der Körper bilden Flächen. Jeder Körper hört in Flächen auf. Es gibt ebene und unebene, (gebogene) Flächen. Eine ebene Fläche ist eine solche, auf der man nach allen Seiten hin grade Linien ziehen kann. Stoßen zwei Flächen zusammen, so dass sie aufhören, so bilden sie eine Kante. Es gibt grade und ungrade (krumme) Kanten. Unter jeder Kante liegt ein

körperlicher Winkel. Durchschneiden sich Flächen, so entstehen mehrere körperliche Winkel. Je kleiner der körperliche Winkel, desto schärfer ist die Kante; je größer der Winkel, desto stumpfer. Es gibt stumpfe, rechte und scharfe Kanten. Da, wo drei oder mehrere Flächenwinkel zusammenstoßen, bildet sich eine körperliche Ekke. Die Stumpfheit und Spitzigkeit der Ekken richtet sich nach der Stumpfheit und Spitzigkeit, so wie nach der Anzahl der zusammentreffenden Winkel. Sehr viele, selbst sehr spitze Winkel können durch ihre Vielheit auch eine stumpfe Ekke bilden. Die Kanten sind zu vergleichen den Strichen, die Ekken aber den Punkten.

I. Die Säulen.

§. 34. Die dreiseitige Säule. Die regelmäßige dreiseitige Säule oder das Dreikant (Zeich. 1) hat, im Stehen, eine obere, eine untere und drei Seitenflächen. Die obere und untere Fläche sind beide gleichlaufend und wagerecht, die Seitenflächen senkrecht. Die Seitenflächen bestehen aus gleichen Rechtekken. Die obere und untere Fläche aus gleichen gleichseitigen Dreiekken. Beide, die obere und die untere Fläche, stoßen mit den Seitenflächen in rechten Winkeln zusammen, und bilden darum rechte Kanten. Die Seitenflächen stoßen in spitzen Winkeln zusammen, und bilden scharfe Kanten. Die drei Seitenkanten sind gleichlang, gleichlaufend und senkrecht. Die drei obern und die drei untern Kanten sind auch gleichlang, liegen wagerecht, und je eine obere Kante ist gleichlaufend mit je einer untern. Alle sechs Ekken, die drei obern und die drei untern, sind gleich, und von zwei rechten und einem spitzen Winkel gebildet. Die Seiten der Dreiekke sind gerade so lang, als die kürzern Seiten der Rechtekke. — Legt man das Dreikant, so wer-

den die obere und untere Fläche zu Endflächen und die Seitenflächen zu Umfangsflächen. Eine der Umfangsflächen dient zur Grundlage, die zwei andern bilden ein Dach, und nur die beiden Endflächen stehen rechtwinklig auf der Grundfläche. Der Körper hat noch ein Mal so viele rechte Winkel, als spitze, und noch ein Mal so viele kurze Kanten, als lange. Stekkt man von der Mitte der Oberfläche bis zur Mitte der Grundfläche einen Drath durch, so lässt sich um denselben leichtlich der liegende Körper drehen oder umschwingen. Ein solcher Drath, oder überhaupt eine solche Richtung mitten durch den Körper, heißt eine Axe. Die Axe läuft gleich mit den drei Seitenkanten und den drei Seitenflächen. Mit dem Dreikant ist die dreiseitige Tafel (siehe das Netz Zeich. 59) sehr verwandt; bei dem Dreikant haben die Seitenflächen die größte Ausdehnung nach oben, bei der dreiseitigen Tafel aber nach den Seiten. Zwischen beiden steht ein Körper als Mittelglied (s. das Netz Zeich. 60). Bei ihm sind die Seitenflächen Quadrate. Durchschneidet man eine dreiseitige Säule gleichlaufend mit der obern oder untern Fläche, in kleinen Entfernungen von einander, so erhält man dreiseitige Tafeln, und legt man diese auf einander, so erhält man wieder eine dreiseitige Säule.

§. 35. Die vierseitige Säule. Die vierseitige Säule oder das Vierkant (das Netz, siehe Zeich. 21) ist in allem Wesentlichen mit dem Dreikant übereinstimmend. Es hat aber zur obern und untern Fläche Gevierte und keine Dreiekke, es besitzt vier obere und vier untere Kanten, die nicht allein paarweis, sondern zu vieren, nämlich ein Paar obere und ein Paar untere, gleichlaufend sind. An den Seiten laufen alle vier Kanten und die Flächen paarweis gleich. Alle Kanten an diesem Körper sind rechte Kanten, weil die Flächen in rechten Winkeln zusammenstoßen; denn alle Flä-

chen= und Kantenwinkel sind rechte Winkel. In jeder Ekke kommen drei rechte Winkel zusammen, nämlich zwei von den Seiten und einer von oben oder von unten. Dieser Körper gleicht einem Balken. Zieht man von dem Mittelpunkt des obern Gevierts eine Axe auf den Mittelpunkt des untern Gevierts, so ist diese gleichlaufend mit den vier Seitenkanten und den vier Seitenflächen. Eine vierseitige Tafel ist mit der vierseitigen Säule verwandt, nur daſs die Gränzstriche der obern und untern Fläche nicht gleich lang sind mit den kleinern Gränzstrichen der Seitenflächen, sondern mit den größern. Der Mittelkörper zwischen der vierseitigen Säule und der vierseitigen Tafel ist der Würfel (siehe §. 47).

§. 36. Die fünfseitige Säule. Die regelmäßige fünfseitige Säule oder das Fünfkant (das Netz, siehe Zeich. 3) hat nicht gleichlaufende Seitenflächen, sondern nur gleichlaufende Seitenkanten. Die obere und untere Fläche laufen gleich, aber von den obern und untern Kanten keine zusammen, sondern nur eine obere mit einer untern gemeinsam. Die obern und untern Kanten sind rechte, die Seitenkanten aber stumpfe. An jeder der zehn Ekken vereinigt sich ein stumpfer Winkel mit zwei rechten. Es sind noch ein Mal so viel rechte als stumpfe Winkel vorhanden, und noch ein Mal so viel kurze als lange Kanten. Die Axe dieses Körpers ist gleichlaufend mit den fünf Seitenkanten, und steht von allen gleich weit entfernt. Die fünfseitige Tafel ist der fünfseitigen Säule verwandt, und der Mittelkörper zwischen beiden muſs Gevierte zu Seitenflächen haben.

§. 37. Die sechsseitige Säule. Die regelmäßige sechsseitige Säule oder das Sechskant (das Netz, siehe Zeich. 4) hat sechs Seitenflächen, die paarweis gleichlaufen. Die stumpfen Seitenkanten sind alle sechs unter einander und alle sechs mit der Axe gleichlaufend. Die obern und untern rechten Kanten sind

zu vieren gleichlaufend. Liegt der Körper, so steht der untern Fläche eine obere engegen, welche beide dann wagerecht sind. Beide Flächen sind verbunden durch zwei Paar andere, die weder wagerecht noch senkrecht, sondern schräg liegen. Die beiden obern schrägen Flächen neigen sich von außen nach innen gegen die wagerechte obere Fläche hinauf, und die beiden untern schrägen senken sich so nach der untern wagerechten hinab. Der Körper ähnelt in dieser Lage etwas dem Sarge. Die obern und untern Kanten an diesem Körper sind gerade so lang, als die Strahlen, welche man auf der obern und untern Fläche vom Mittelpunkt zu den Winkeln ziehen kann. Die Axe dieses Körpers steht gerade so weit von jeder Seitenkante ab, als diese Kanten unter einander selbst. Dasselbe gilt von den Enden der Axe und den Ekken.

§. 38. Die achtseitige Säule. Die regelmäßige achtseitige Säule oder das Achtkant (das Netz, siehe Zeich. 5) hat noch stumpfere Seitenkanten, als das Sechskant, bei dem die Seitenkanten stumpfer waren, denn beim Fünfkant. Von den Seitenflächen laufen zwei und zwei gleich, und von den obern und untern Kanten je vier. Liegt dieser Körper, so sind nicht allein die beiden Endflächen senkrecht, sondern auch zwei Seitenflächen, während zwei andere in wagerechter Lage sich befinden. Die vier schräg liegenden Flächen halten gerade die Mitte zwischen der wagerechten und senkrechten Richtung. Die Strahlen (Radien) an der obern und untern Fläche sind länger, als die Seitenkanten, und die Axe steht entfernter von den Seitenkanten, als diese unter einander.

§. 39. Die Walze. Die Walze (liegend) oder die Rundsäule (Cylinder) (stehend) (das Netz, siehe Zeich. 6) hat zur obern und untern Fläche zwei gleiche gleichlaufende Kreise; die Seitenfläche weicht von den Seitenflächen der vorhergegangenen Körper darin ab, daſs sie

eine einzige und zwar eine gebogene ist. Darum fallen auch alle Seitenkanten weg. Die Endflächen sind eben, mithin hat dieser Körper gemischte Flächen, ebne und unebne. Die Endkanten sind gebogen, und bilden zwei Kreisstriche. Grade Kanten hat dieser Körper gar nicht, so wie auch keine Ekken und Winkel. Die Seitenfläche steht in rechten Winkeln auf den Endflächen, und die Axe befindet sich genau in der Mitte der hohlen Seitenfläche, so daſs ihre Enden von den Endkanten überall gleich weit entfernt sind. Dieser Körper wird sich am besten um die Axe umschwingen lassen, nach ihm das Achtkant; am schlechtesten das Dreikant. Ein Hundertkant würde sich auch sehr gut schwingen. Ueberhaupt, je vielkantiger eine regelmäßige Säule ist, desto mehr nähert sie sich der Walze; so wie ein regelmäßiges Ekk sich um so mehr dem Kreis nähert, je vielekkiger es ist. Ist der Durchmesser der Rundsäule länger, als die Höhe des Körpers, so kann man sie eine runde Tafel, oder, in Bezug auf die Walze, eine runde Scheibe nennen. Stellt man ein Rechtekk oder ein Geviert in Gedanken aufrecht, hält die eine Seite fest und dreht die gleichlaufende herum, so beschreibt diese leztere die Seitenfläche der Walze; die erstere steht da als Axe, und die obere und untere Seite bilden die Strahlen des Grundes und der Oberfläche*)

II. Die Spitzsäulen.

§. 40. Die regelmäßige dreiseitige Spitzsäule oder das Dreispitz. Dieser Körper (das Netz, siehe Zeich. 7) unterscheidet sich von allen Kanten da-

*) Beugt man das Rechtekk aus Drath zusammen, so daſs man drei Seiten um die vierte bewegen kann, und macht schnell den Umschwung, so sieht man scheinbar die Walze. Vom Kegel und der Kugel (siehe §. 45 und §. 51) gilt etwas Aehnliches.

durch, daß er keine obere Fläche, sondern nur eine Grundfläche mit Seitenflächen hat. Die Grundfläche ist ein gleichseitiges, wagerecht liegendes Dreiekk, und die Seitenflächen sind drei gleiche, spitzwinklig=gleichschenklige Dreiekke, die nicht senkrecht, sondern schräg auf der Grundfläche stehen. Die dreiseitige Spitzsäule kann nur stehen. Liegt sie, so sieht es unrichtig und unordentlich aus. Die drei Seitenkanten laufen mit ihren obern Enden, als Schenkel dreier spitzer Winkel, in einer, vor allen ausgezeichneten, Ekke zusammen. Am Grunde dieses Körpers sind drei Ekken, jede gebildet durch zwei Winkel der Seitenflächen und einen Winkel der Grundfläche. Stekkt man einen Drath von der obern Spitze in die Mitte des Grundes, so steht er winkelrecht auf diesem, ist nicht gleichlaufend mit den Seitenkanten, bildet keine Axe, sondern gibt nur die Höhe des Spitzes an. Eine dreiseitige Spitzsäule, deren Höhe sehr gering ist, so daſs die obere Spitze deshalb ganz stumpf erscheint, könnte man ein Dreistumpf nennen. Ein Dreispitz, dessen drei Seitenflächen gleichseitige Dreiekke sind, ist ein unregelmäßiges Vierflach (siehe §. 46.)

§. 41. Die regelmäßige vierseitige Spitzsäule oder das Vierspitz. Dieser Körper (Netz, siehe Zeich. 8) ruht auf einem Quadrat und hat vier spitzwinklig=gleichschenklige Dreiekke zu Seitenflächen. An seiner obern Spitze kommen vier spitze Winkel zusammen, und an den Grundekken zwei spitze mit einem rechten. Die Höhe der vierseitigen Spitzsäule, gezogen von der Spitze bis zur Mitte der Grundfläche, bildet einen senkrechten Strich, während die Seitenkanten schräg und die Grundkanten wagerecht sind. Eine vierseitige Spitzsäule, deren Höhe sehr gering ist, könnte ein Vierstumpf heißen.

§. 42. Die regelmäßige fünfseitige Spitzsäule oder das Fünfspitz. Dieser Körper (das Netz, siehe Zeich. 9) hat zum Grunde ein regelmäßiges Fünfekk.

§. 43. Die regelmäßige sechsseitige Spitzsäule oder das Sechsspitz. Dieser Körper (das Netz, siehe Zeich. 10) hat zum Grunde ein regelmäßiges Sechsekk.

§. 44. Die regelmäßige achtseitige Spitzsäule oder das Achtspitz. Dieser Körper (das Netz, siehe Zeich. 11) hat zum Grunde ein regelmäßiges Achtekk. In allem Uebrigen ähneln diese drei letzten Körper der drei- und der vierseitigen Spitzsäule. Die Seitenflächen sind bei ihnen spitzwinklig-gleichschenklige Dreiekke. An den untern Ekken des Fünf-, Sechs- und Achtspitzes kommen je zwei gleiche spitze Winkel mit einem stumpfen zusammen.

§. 45. Die runde Spitzsäule, das Rundspitz oder der Kegel. Dieser Körper (Zeich. 12) hat zum Grunde einen Kreis, und besitzt eine einzige, in sich gebogene und in sich gezogene Fläche. Nur eine, und zwar runde, Kante kommt an ihm vor, so wie eine Ekke und zwei gemischte Flächen. Bewegt man ein rechtwinkliges Dreiekk so um sich selbst, dass die eine, dem rechten Winkel anliegende, Seite senkrecht still steht, so wird ein Kegel gebildet, dessen Höhe jene stillstehende Seite ist, und dessen Grund die andre, dem rechten Winkel anliegende, Seite zum Strahl hat, während die dem rechten Winkel gegenüber stehende Seite die Seitenfläche des Kegels in ihrer Bewegung beschreibt.

III. Die Flache.

§. 46. Das Vierflach. Das regelmäßige Vierflach (Tetraeder) (das Netz, siehe Zeich. 13) ist ein Dreispitz, das, man mag es legen, auf welche Fläche man will, immer richtig steht. Es hat vier gleiche Flächen, wovon jede ein gleichseitiges Dreiekk ist. Macht man eine Fläche zur Grundfläche, so bilden die andern drei Flächen Seitenflächen; drei Kanten liegen dann am

Grunde und drei an den Seiten; drei Ekken am Grunde und eine oben. Alle Kanten sind gleich lang und gleich scharf; an allen Ekken kommen gleich viele, gleiche Winkel zusammen. Stellt man den Körper auf einer Kante, so liegt eine andre Kante oben, und zwar mit der untern in rechten Winkeln. Von den vier Ekken liegen dann zwei unten und zwei oben; von den Flächen streben zwei herauf und zwei hinunter. Alle Kanten liegen paarweis in rechten Winkeln zu einander.

§. 47. Der Würfel. Das regelmäßige Sechsflach (Hexaeder) oder der Würfel (Cubus) (das Netz, siehe Zeich. 14) steht gleich dem Vierflach auf allen Flächen gleich gut. Sellt man den Würfel vor sich, so liegt eine Fläche unten, eine oben, eine vorn, eine hinten, eine rechts, eine links. Die zwei ersten Flächen liegen wagerecht, die vier andern senkrecht. Alle Flächen sind gleich große Gevierte, die in zwölf rechten Kanten zusammenstoßen. Von den vierundzwanzig rechten Winkeln vereinigen sich je drei zu einer Ekke; darum sind acht Ekken vorhanden, vier an der obern, vier an der untern Fläche liegend. Die Flächen laufen zu 2, die Kanten zu 4 gleich. Stekkt man Drathe durch den Würfel von der Mitte der einen Fläche zur Mitte der mit ihr gleichlaufenden, so hat man die kleinern Würfelaxen, deren es drei gibt; stekkt man diese Drathe aber von der einen Ekke durch den Mittelpunkt des ganzen Körpers zur entgegengesetzten andern Ekke, so hat man die größern Axen des Würfels, deren es vier gibt. Stekkt man einen Drath von der Mitte der einen Kante zur Mitte der andern entgegenliegenden durch den Körper, so hat man die mittlere Axe, die grade so lang ist, als die Geere, Diagonale der Gevierte. Solche Kantenaxen hat der Würfel sechs. Die Flächenaxen sind die kürzesten, länger die Kantenaxen, und am längsten die Ekk-

axen. Alle Axen gehen durch den Mittelpunkt. — Das Vierflach hat nur Kantenaxen, keine Ekk- und Flächenaxen. — Stellt man den Würfel auf eine Ekke, so liegt eine andere Ekke oben, und die sechs übrigen Ekken bilden in der Mitte mit sechs Kanten einen Zikkzakk; drei Kanten streben nach unten und drei nach oben.

§. 48. Das Achtflach. Das regelmäßige Achtflach (Octaeder) (das Netz, siehe Zeich. 15) wird am besten betrachtet, wenn man es auf einer Ekke stellt. Es liegt dann eine andre Ekke oben, eine vorwärts rechts, eine vorwärts links, eine hinterwärts rechts, eine hinterwärts links. Von den acht Flächen liegen vier nach oben und vier nach unten, von den zwölf Kanten vier nach oben vier nach unten und vier gerade in der Mitte, welche letzten wagerecht sind. Legt man das Achtflach auf einer Fläche, so sieht man leicht, daſs die Kanten und die Flächen paarweis gleichlaufen, doch die Flächen in entgegengesetzter Lage, so daſs, wenn bei einer Fläche die eine Dreiekkspitze rechts liegt, bei der andern sich eine solche Spitze links befindet. Alle acht Flächen dieses Körpers sind gleichseitige Dreiekke, wie beim Vierflach. Beim Vierflach vereinigten sich in einer Ekke nur drei Winkel, beim Achtflach aber vier. Die Kanten beim Achtflach sind stumpf. Das Achtflach hat vier Flächenaxen, sechs Kantenaxen, die gerade so lang sind, wie die Kanten selbst, und drei Ekkaxen, die sich in rechten Winkeln durchschneiden. Je vier und vier Ekken, oder je vier und vier Kanten, die in einer Ebene liegen, bilden dem Achtflach die Lage eines Quadrats.

§. 49. Das fünfekkige Zwölfflach. Das regelmäßige fünfekkige Zwölfflach (Dodekaeder) (das Netz, siehe Zeich. 16) gestellt auf einer Fläche, hat eine obere wägerechte Fläche, die mit der untern gleich läuft, aber in entgegengesetzter Richtung liegt, so daſs,

wenn bei der obern Fläche die eine Ekke dem Betrachtenden zusieht, bei der untern Fläche eine Kante sich da zeigt. Alle zwölf Flächen an diesem Körper sind regelmäßige Fünfekke. Von den zehn Flächen, die außer der untern und der obern vorhanden sind, stoßen fünf an die obere und fünf an die untere Fläche. Die nach oben liegenden und die nach unten liegenden berühren sich untereinander in einem Kreiszikkzakk. Die zwölf mittlern Flächen liegen weder senkrecht noch wagerecht. Die Flächenseiten berühren sich in bedeutend stumpfen Kanten. Solche hat der Körper dreißig. Fünf davon liegen oben, und fünf unten wagerecht, fünf gehen von oben zum Kreiszikkzakk, und fünf von unten dahin, zehn aber bilden den Kreiszikkzakk. An jeder Ekke dieses Körpers vereinigen sich drei stumpfe Winkel. Fünf Ekken liegen an der obern, fünf an der untern Fläche, und zehn bilden den Kreiszikkzakk. Von diesen zehn liegen fünf höher und fünf niedriger. Die fünf höhern liegen in einer wagerechten Ebene und die fünf niedern auch. Durchschnitte man darnach den Körper, so würden die Durchschnittsflächen regelmäßige Fünfekke bilden. Die Flächen sind zu zweien gleichlaufend, und die entgegenstehenden Kanten auch. Liegen zwei Flächen wagerecht, so ist keine Fläche und keine Kante senkrecht, sondern alle nicht wagerechten sind schräg. Stellt man den Körper auf einer Kante, so liegt eine andre Kante oben wagerecht und gleichlaufend mit der untern, ein Paar wagerechte und gleichlaufende Kanten liegen an den Seiten, und ein Paar gleichlaufende senkrechte Kanten vorn und hinten; alle drei Paar Kanten liegen zu einander in rechten Winkeln. An jeder dieser sechs Kanten liegt ein Flächenpaar, mithin ist ein Flächenpaar oben, eins unten, eins vorn, eins hinten, eins rechts, eins links. Diese sechs Flächenpaare umzwieseln den Körper. Flächenaxen besitzt derselbe sechs, Kantenaxen funfzehn, und Ekkaxen zehn.

§. 50. Das Zwanzigflach. Stellt man das regelmäßige Zwanzigflach (Ikosaeder) (das Netz, s. Zeich. 17) auf einer Ekke, so liegt eine andre Ekke oben, 5 Ekken nach oben hin und 5 andre nach unten hin. Es treten also 12 Ekken hervor. Die 5 nach oben und die 5 nach unten liegenden Ekken befinden sich beide in einer Ebene, die ein regelmäßiges Fünfekk bildet. Beide Ebnen sind gleichlaufend, und bei dem angenommenen Standpunkt des Körpers wagerecht. Von den 20 Flächen dieses Körpers, die alle gleiche gleichseitige Dreiekke sind, stoßen 5 an die obere Ekke, 5 an die untere an, während 20 einen Zikkzakkreifen zwischen beiden bilden. An jeder Ekke kommen 5 Winkel zusammen, — beim Achtflach nur 4, beim Vierflach nur 3. Von den 30 Kanten dieses Körpers liegen 5 nach oben zu wagerecht, 5 nach unten zu ebenfalls, 5 streben von den wagerechten obern Kanten nach der obern Ekke, und 5 von den wagerechten untern Kanten nach der untern Ekke. Die andern 10 Kanten bilden ein Zikkzakk von den oben wagerechten zu den untern wagerechten. Legt man den Körper auf einer Fläche, so liegt eine andre entgegengesetzt wagerecht und gleichlaufend mit der untern; doch sind beide nicht in gleicher dekkenden Lage. Da man jede Fläche zur Grundfläche machen kann, so sind die Flächen an diesem Körper paarweis gleichlaufend. Dasselbe gilt von den Kanten. Stellt man den Körper auf einer Kante, so liegt eine andere Kante oben, wagerecht und gleichlaufend mit der untern, 2 andere liegen an den Seiten wagerecht und 2 andere senkrecht. Diese 3 Kantenpaare liegen rechtwinklig zu einander, und haben an sich 6 Flächenpaare, die aber durch 8 andere Flächen getrennt sind. Flächenaxen hat der Körper 10, Kantenaxen 15, und Ekkaxen 6. Die Kanten dieses Körpers sind sehr stumpf. Stellt man den Körper auf einer Fläche, so sieht man, dass nicht allein die 3 obern und die 3 untern Ekken in einer wagerechten

Ebene liegen, sondern noch 2 Mal 3 andere, und zwar beide in gleichseitigen Dreiekk's-Ebenen, welche unter einander und mit der obern und untern Fläche gleichlaufend sind. Stellt man den Körper auf einer Kante, so liegen die 4 obern Ekken in Rautenform zu einander, doch nicht in einer Ebene. Dasselbe gilt von den vier untern. Die vier mittlern Ekken liegen aber in Rechtekk's-Form und in einer Ebene zu einander.

§. 51. Die Kugel. Diese hat nur eine einzige, in sich selbst abgeschlossene Fläche, ohne alle Kanten, Winkel und Ekken. Die Fläche ist gebogen, und von welchem Theil der Fläche man auch durch den Mittelpunkt die Kugel völlig durchsticht, so hat man eine Axe. Durchschneidet man die Kugel nach dem größten Umkreis, so durchschneidet man auch den Mittelpunkt und theilt die Kugel in zwei gleiche Hälften. Die Kugelhälften sind von 2 Flächen begränzt, von einer ebenen Kreisfläche und einer gebogenen Fläche. Sie haben eine in sich gewundne Kante. Eine Viertelkugel hat auch eine grade rechte Kante und 2 gebogene, 2 ebene und eine gebogene Fläche. An ihr kommen 4 Winkel vor, aber gebildet durch gemischte Schenkel, durch grade und gebogene. Dreht man einen Halbkreis um den Durchmesser, so beschreibt der halbe Umkreis in seiner Bahn die Kugel-Oberfläche.

Anweisung. Das Verfahren bei dieser Uebung ist einfach. Der Lehrer nimmt zuerst bald diesen, bald jenen Körper, um den Schüler dahin zu bringen, daß er auf das achtet, was zu beachten ist, und geht dann allmälig in der hier gewählten Folge alle Körper durch, und zwar noch ausführlicher, als es hier geschehen ist, weil hier in der Regel das wegblieb, was schon an einem vorhergehenden Körper behandelt war. Außer den Körpern, wozu wir die Netze angegeben haben, kann sich der Lehrer noch alle vorkommenden Tafeln machen, deren Netze sich aus den Kantennetzen von selbst ergeben, wie auch mehrere Stumpfe, deren Netze aus den Spitznetzen zu

entnehmen sind. Wo die Rede ist von Durchschneiden, muss entweder dies würklich geschehen, oder die Durchschnittsstükke müssen vorhanden sein, zusammengelegt und getrennt werden können. Dasselbe gilt von dem Durchstechen eines Drathes. Auf die Stellung und Lage der Körper kommt bei deren Betrachtung außerordentlich viel an; darum ist es sehr zu rathen, dass man sich für die Körper, welche auf Ekken oder Kanten gestellt werden, Untersätze anschafft, in die gerade ihre Grundekken und Grundkanten hineinpassen. Bei dieser Uebung ist manche Anschauung leichter selbst zu machen, als gehörig lichtvoll auszusprechen. Deshalb sei der Lehrer hier recht aufmerksam auf den Ausdrukk, denn er betrifft die Sache selbst. Damit der Lehrer nichts vergisst, so kann er sich den ganzen Stoff nach einer gewissen Reihenfolge ordnen, die bei allen Körpern wiederkehrt; z. B. drei Stellungen des Körpers, Anzahl der Flächen, Beschaffenheit deren Winkel und Seiten, Lage der Flächen zu einander, Lage zur Erde, Anzahl der Kanten, ihre Lage zu einander und zur Erde, Anzahl der Ekken, ihre Lage zu einander, Vereinigung der Winkel in ihnen, drei Arten Axen.

Dritter Abschnitt.

Die schwerern Betrachtungen und Darstellungen.

Erste Uebung.

Strich-, Winkel- und Bogen-Bildung.

Winkel- und Strich-Bildung und -Theilung.

§. 52. Uebergang von §. 12 — 14 zu §. 53 und folgg. Es ist §. 12 bis 14 gezeigt, wie man einen rechten Winkel bildet, Winkel richtig abträgt und gleichlaufende Striche zieht. Da aber diese 3 Gegenstände so

wichtig sind, so muss man mehrere Arten kennen lernen, nach denen sie behandelt werden können, und dies um so mehr, da bald diese, bald jene Art sich am besten ausführen lässt.

§. 53. Bildung des rechten Winkels durch Bogen. Soll auf a b (Zeich. 148) von einem Punkt aus, der sich nahe an dem einen Ende eines Striches befindet, der nicht zu verlängern ist, hier von c aus, ein rechter Winkel gesetzt werden, so beschreibt man, von c aus, einen großen Bogen, der den gegebnen Strich berührt (hier in v) und schneidet mit derselben Zirkelöffnung 2 Stükke, hier v d und d e, von dem Bogen ab, von den Trennungspunkten, hier von e und d, macht man mit beliebiger, aber gleicher, Zirkelöffnung oberhalb 2 Bogen, deren Kreuzpunkt (hier f) mit dem gegebenen Punkt (hier c) zu verbinden ist, um f c b zu einem rechten Winkel zu machen.

§. 54. Drei andere Arten, den rechten Winkel zu bilden. Es soll (Zeich. 149) am Ende des Striches a e, nämlich an dem Punkt e ein rechter Winkel errichtet werden. Es kann dies auf 3 Arten geschehen:

1) Man fasst a e mit dem Zirkel, und beschreibt damit (§. 15) ein gleichseitiges Dreiekk. Den Strich a b, als den, welcher dem zu bildenden rechten Winkel gegenüber liegt, verlängert man so weit, dass b c = a b wird. Verbindet man darauf c mit e, so muss a e c ein rechter Winkel sein.

2) Man wähle sich über dem gegebnen Strich (hier a e) einen beliebigen Punkt (hier b), mache die Zirkelöffnung so weit, als dieser Punkt von dem künftigen Winkelpunkt e entfernt ist, und beschreibe damit, also mit b e, den Kreisbogen a e c, der a e, oder dessen Verlängerung durchschneidet. Von dem Durchschnittspunkt (hier a) ziehe man einen Strich nach dem Mittelpunkt des Bogens (hier b) und dehne diesen Strich so weit aus, dass

er den Bogen zum zweiten Mal (hier in c) durchschneidet. Diesen Punkt verbindet man mit dem zu bildenden Winkelpunkt e, und a e c muss ein rechter Winkel sein.

3) Man theile a e in drei gleiche Theile, nehme vier solcher Theile in den Zirkel und beschreibe damit ebenfalls einen Bogen und verbinde den Durchschnittspunkt (hier d) mit e, so muss a e d ein rechter Winkel sein.

§. 55. Theilung eines Striches in zwei gleiche Theile. Es soll (Zeich. 78) i a in zwei gleiche Theile getheilt werden, ohne dass man versuchsweis verfährt. Man beschreibt zu diesem Behuf mit einer beliebigen, aber stets gleich bleibenden Zirkelöffnung von i und a aus sich durchschneidende Kreisbogen oberhalb und unterhalb des Striches, und verbindet die Durchschnittspunkte (hier b und d) durch einen Strich. Dieser theilt i a in zwei gleiche Theile.

Wäre oberhalb oder unterhalb des zu theilenden Striches ein Hinderniß für das Kreisbogenschlagen, so könnte man auch beide Kreuzpunkte, welche die Richtung der theilenden Linie bestimmen, oberhalb oder unterhalb des zu theilenden Striches bilden, und müsste dann die theilende Linie bis zu der zu theilenden verlängern.

§. 56. Theilung eines sehr langen Striches in zwei gleiche Theile. Es soll (Zeich. 150) ein Strich, a b, in zwei gleiche Theile getheilt werden, und der Strich so lang sein, dass man von seinen Endpunkten keine Kreuzbogen schneiden kann. — Man schneidet von beiden Enden gleiche Theile mit dem Zirkel ab, mit einmaliger oder mehrmaliger Oeffnung desselben, bis man Punkte erreicht, von denen man bequem Kreuzbogen schlagen kann. Hier ist a c und d b weggeschnitten. Von c und d verfährt man, wie §. 55 angegeben ist, und k b muss gleich k a sein.

§. 57. Bildung gleichlaufender Striche ohne rechte Winkel:

1) Es sei (Zeich. 151) der Strich e b gegeben und der Punkt g, um von da aus einen Strich gleichlaufend mit e b zu ziehen. Man setzt in g den einen Schenkel des Zirkels, und dehnt den andern in der nächsten Richtung bis e b aus, so dass man mit seiner Weite einen Bogen beschreibt, der e b nur berührt, nicht durchschneidet. Darauf beschreibt man von einem Punkt des Striches (hier von e) einen Bogen nach der Richtung hin, welche der beabsichtigte Strich ungefähr nehmen muss. Den äußern Punkt dieses Bogens (hier s) verbindet man mit dem gegebenen Punkt, und der neugebildete Strich muss gleichlaufend mit dem gegebenen sein.

2) Es sei (Zeich. 152) a b gegeben und der Punkt r, um von da aus einen Strich gleichlaufend mit a b zu ziehen. Man verbindet r mit einem Punkt von a b, hier mit o, o r theilt man in zwei gleiche Theile, und zieht vom Theilungspunkt f einen Strich auf a b, hier zu i, f i verlängert man, so dass f s gleich wird f i; s und r sind endlich zu verbinden, und der Bindestrich ist gleichlaufend mit a b.

3) Es sei (Zeich. 81) a b und der Punkt c gegeben; so ziehe man von c aus einen Strich auf a b, hier c o, messe einen der dadurch entstandenen Winkel, hier entweder i oder u, und trage ihn in entgegengesetzter Lage an c an; so dass also entweder k = i oder r = u wird. Der dadurch entstehende neue Schenkel muss gleichlaufend mit dem gegebenen Strich sein.

§. 58. Abtragung eines Winkels. Es soll ein Winkel gemacht werden, der einem gegebnen gleich ist. Außer der (§. 13) angegebenen Art, geht dies noch auf folgende Weise: Es sei (Zeich. 49) E A D der gegebne Winkel, welchem einer gleich gemacht werden soll. Man umspannt von A aus den Winkel mit dem Bogen D E, wodurch A E und A D gleich werden. Darauf zieht man einen Strich, a b, schlägt von a aus den Bogen

el, von e aus mit der Oeffnung E D den Bogen ki, und verbindet den Kreuzpunkt d mit a; so ist ∠ead = ∠EAD.

§. 59. Theilung eines Winkels in zwei gleiche Theile. Zeich. 79 befindet sich der Winkel bda; dieser soll in zwei gleiche Theile getheilt werden. Man setzt deswegen den Zirkel in d ein, und zieht mit einer beliebigen Oeffnung den Bogen ab. Von den Punkten aus, wo der Bogen die Schenkel des Winkels durchschneidet, schlägt man über den Winkel Kreisbogen, und verbindet den Kreuzpunkt k mit dem Winkelpunkt d. Der Strich kd theilt nothwendig den Winkel bda in zwei gleiche Theile.

II. Verschiedene Bogenbildungen.

§. 60. Eine Stahlfederwindung aus Halbkreisen. Man ziehe sich (Zeich. 153) einen beliebigen Strich, pq, nehme in dessen Mitte einen Punkt a an, und beschreibe von dem aus mit einer sehr kleinen Zirkelöffnung den Bogen bcd; nehme dann bd zum Strahl, und beschreibe von b aus den Bogen dgk; nehme dann ak zum Strahl, und beschreibe von a aus kem, nehme dann bm zum Strahl und beschreibe von b aus mhl, nehme dann al zum Strahl, und beschreibe von a aus lfn, nehme bn zum Strahl, und beschreibe von b aus nio. So kann man fortfahren; stets wechselweis von a und b aus, mit dem Strahl, der von diesen Punkten bis zum Ende des gezogenen Bogens geht, einen neuen Halbkreis bildend.

§. 61. Eine Schneckenwindung aus Halbkreisen. Man ziehe (Zeich. 154) einen Strich, wz, und beschreibe aus einem mittlern Punkt desselben, hier aus a, einen ganz kleinen Kreis, dessen Durchmesser, hier sr, man in sechs gleiche Theile theilt, hier se, ei, ia, ao, on, ur. Aus den Punkten o, i, u, e, r, s schreibt

man jetzt nach einander Halbkreise, nämlich aus o mit o s den Halbkreis s g m, aus i mit i m den Halbkreis m f n, aus u mit u n den Halbkreis n h p, aus e mit e p den Halbkreis p d q, aus r mit r q den Halbkreis q k v, aus s mit s v den Halbkreis v b x.

§. 62. Ein Linsenstrich*) durch Kreisbogen. 1) Es sei (Zeich. 155) der Strich a b gegeben, um darum einen Linsenstrich (Ellipse) zu bilden. Man schneidet sich die drei gleichen Stükke p o, o u und u q ab, beschreibt aus o mit o p und aus u mit u q zwei Kreise, die sich gleich sind und sich in r und s durchschneiden. Die Durchschnittspunkte verbindet man mit den beiden Mittelpunkten, und verlängert diese vier Striche so weit, dass sie die Umkreise berühren; so entstehen hier die vier Striche r w, r x, s n, s m. Endlich fasst man s n in den Zirkel, und beschreibt von s aus den Bogen n t m, und von r aus mit r w den Bogen w d x, so ist der Linsenstrich, oder die Linsenfläche fertig. Diese hat p q zum längern und t d zum kürzern Durchmesser.

2) Es sei (Zeich. 156) der Strich a b gegeben; man theilt ihn in vier gleiche Theile, und beschreibt von o, u und v aus drei gleiche Kreise. Von o und v aus schlägt man oben und unten mit beliebiger Zirkelöffnung Kreisbogen, und verbindet deren Durchschnittspunkte m w mit einander. Der Durchstrich m w durchschneidet winkelrecht mit o v den mittelsten Umkreis in x und n. Von diesen Punkten aus zieht man Striche durch die Mittelpunkte der äußern Kreise (n v, n o, x o, x v) und verlängert dieselben bis zu den Umkreisen (n s, n z, x t, x r), dadurch erhält man die Strahlen, mit denen man von n und x aus die Bogen t f g r und s h k z beschreibt.

*) Der Name Linsenstrich (Ellipse, Langrund, Abrund) kommt daher, weil die Linse, wenn man sie von oben nach unten durchschneidet, solche Durchschnittsflächen hat.

§. 63. Ein Linsenstrich, dessen kleiner und großer Durchmesser gegeben ist. Zeich. 157 ist der größere Durchmesser a b und der kleinere c d gegeben. Man setzt sie so, dass sie sich in ihren Mitten, hier o, rechtwinklig durchschneiden, und fasst eine Hälfte des längern Durchmessers, also hier entweder o b oder o a, in den Zirkel, um damit von d aus den Bogen e n p und von c aus den Bogen l m p zu beschreiben. In die Durchschnittspunkte l und p setzt man Stifte, so wie auch in den Punkt d. An diesen Stiften befestigt man von l über d nach p einen Faden, so dass er in l und p fest sitzt und nur um d liegt. Den Stift bei d zieht man aus und fährt mit ihm, während der Faden stets straff um ihn sitzt, aber sich schiebt, nach b, so hat man den Bogen d x b beschrieben. Der Faden l x p ist gleich dem Faden l d p, weil es ja derselbe Faden ist. So wie man mit dem Stift von d nach b gefahren ist, so fährt man auch von d nach a, zieht dann den Faden zwischen l p durch und fährt mit dem Stift von c nach b und von c nach a, so ist der geforderte Linsenstrich fertig. Die Punkte l p, welche auf dem längern Durchmesser so weit von den Enden des kürzern Durchmessers entfernt liegen, als die Hälften des längern Durchmessers lang sind, nennt man die Brennpunkte.

§. 64. Ein Eistrich (Eirund, Oval).

1) Man beschreibt (Zeich. 158) den Kreis a k n x, zieht die Kreuz-Durchmesser k x und a n, und verlängert den ersten. Von n aus und von a aus werden Striche durch x und über x hinaus und mit dem Durchmesser a n Bogen bis zu diesen Strichen gezogen, nämlich von n aus der Bogen a u, und von a aus der Bogen n v. Endlich zieht man von x aus mit x v den Bogen v u, und der Eistrich (das Oval) ist fertig.

2) Man beschreibt (Zeich. 159) zwei gleiche Kreise, deren Umkreise wechselweis durch den Mittelpunkt gehen.

Die Durchschnittspunkte beider Kreise, n und m, werden mit einem Kreismittelpunkt, hier mit u, verbunden, und beide Bindestriche bis zum Kreisumfang verlängert. Mit diesen Strichen, mz und nf, beschreibt man von n und m Kreisbogen, die bei p und o an den obern Kreis sich anschließen und bei x sich durchschneiden. Den Durchschnittspunkt verbindet man mit den Kreismittelpunkten, und theilt den Raum von ux bei w in 2 gleiche Theile. Von den Kreisdurchschnittspunkten zieht man durch u die Striche ms und ng, und beschreibt von w aus mit ws den Bogen gs, so ist das Eirund fertig.

§. 65. Ein Schlangenstrich. Man theilt (Zeich. 128) einen graden Strich in lauter gleiche, z. B. ab in 8 Theile, macht einen Theil zum Halbmesser und beschreibt damit Halbkreise, die wechselnd oben und unten liegen; als mit ra von r aus den Bogen anx oben, mit vx von v aus den Bogen xmk unten u. s. w.

§. 66 Ein Wellenstrich. Man ziehe (Zeich. 160) drei gleichlaufende Striche, ab, cd, ef, welche gleichen Abstand von einander haben, theile sie gleichmäßig ein und verbinde die Theilungspunkte in rechten Winkeln, so daß Quadrate oder Rechtekke entstehen. Mit den Geeren (z. B. mit gc beschreibe man abwechselnd von oben und von unten aus Kreisbogen, hier z. B. von g, h, i, und k aus, so ist der Wellenstrich da.

Anweisung. Diese Uebung erweitert die erste Uebung im zweiten Abschnitt, und fügt Vieles bei, was dem Schüler eine Zeichenfertigkeit gibt und einen Blikk für Größen. Durch die zweite und dritte Uebung im vorigen Abschnitt ward der Schüler erst fähig, diese Erweiterungen der ersten Uebung desselben Abschnittes gehörig aufzufassen und auch auszuüben. In der Errichtung des rechten Winkels, in der Bildung gleicher Winkel, der Theilung von Strichen und Winkeln, so wie in der Bildung gleichlaufender Striche, kann der Schüler nicht genug geübt werden, weil das Anforderungen sind, die späterhin bei der Lösung fast jeder Aufgabe vorkommen.

Das Verfahren des Lehrers hierbei ist außerordentlich einfach. Er gibt die Aufgabe, deutet die Lösung dem Schüler an und lässt sie ausführen. Die Stärke und Schwäche des Schülers entscheidet darüber, ob der Lehrer viel oder wenig anzudeuten hat. Die Bildung der Bogenstriche macht den Schülern große Freude, und ist eine Erholung für sie. Allein nicht darum allein ist sie hier mitgenommen, sondern auch wegen ihres Nutzens. Sollten denkende Schüler fragen, warum dies oder jenes so gemacht werde, so muss man sie auf die Zukunft vertrösten. Bei manchen Sachen ist es indess auch möglich, auf dieser Stufe schon den Schülern einen Grund anzugeben. In der Regel fragen aber die Schüler bei Sachen, die sich ihnen durch die Sinne als einsichtlich aufdrängen, nicht nach Gründen.

Zweite Uebung.

Flächen in und neben einander.

I. Eingeschriebene und umgeschriebene Flächen.*)

§. 67. Ein gleichseitiges Dreiekk in einen Kreis. Ziehe (Zeich. 161) den Durchmesser b d, fasse den Strahl e d in den Zirkel, und beschreibe damit von d aus den Bogen a e c, verbinde die Kreuzpunkte a und c unter einander und mit b; so hast du das gleichseitige Dreiekk.

§. 68. Ein Kreis um ein gleichseitiges Dreiekk. Theile (Zeich. 134) die Winkel des Dreiekkes in 2 gleiche Theile (§. 59), so erhältst du in dem Kreuzpunkt der Theilungsstriche in o den Mittelpunkt des zu bildenden Kreises; setze den Zirkel also in o und in eine Ekke des Dreiekkes und beschreibe den Kreis!

§. 69. Ein Kreis in ein gleichseitiges

*) Die Ekken der eingeschriebenen Flächen müssen in die Seiten der umgeschriebenen fallen.

Dreiekk. Theile (Zeich. 135) die Winkel des Dreiek-kes, um einen Mittelpunkt zu erhalten (§. 68), setze den Zirkel in den Mittelpunkt und mitten auf eine Seite des Dreiekkes; nun beschreibe den Kreis!

§. 70. Ein gleichseitiges Dreiekk um einen Kreis. Theile (Zeich. 135) den Umkreis in drei gleiche Theile, indem du den Halbmesser 3 Mal doppelt herum trägst. Von den Theilungspunkten r t s ziehe Halbmesser zum Mittelpunkt, und errichte über diese Halbmesser in rechten Winkeln grade Striche, so müssen ihre Kreuzpunkte m v n die Ekken des gleichseitigen Dreiekkes sein.

§. 71. Ein Geviert in einen Kreis. Ziehe (Zeich. 136) 2 Durchmesser, die sich in rechten Winkeln durchschneiden, und verbinde die Punkte mit einander, in welchen sie den Umkreis berühren!

§. 72. Ein Kreis um ein Geviert. Theile (Zeich. 136) das Geviert durch Geeren (Diagonale) und beschreibe mit einer halben Geere den Kreis!

§. 73. Ein Kreis in ein Geviert. Theile (Zeich. 137) die Geviertseiten in 2 gleiche Theile, verbinde die Theilungspunkte r v und a o mit einander und beschreibe mit der Hälfte eines dieser Verbindungsstriche, z. B. mit n o, den Kreis.

§. 74. Ein Geviert um einen Kreis.

1) Theile den Kreis (Zeich. 137) durch rechtwinklige Kreuzdurchmesser in 4 gleiche Theile, errichte über jedem Ende der Durchmesser rechte Winkel und verlängere die Striche bis zur Durchschneidung!

2) Theile den Kreis (Zeich. 162) durch rechtwinklige Kreuzdurchmesser in 4 gleiche Theile, beschreibe von den 4 Theilungspunkten (also von m p n s) aus mit einem Halbmesser (z. B. mit o n) 4 Halbkreise im Kreise, so werden ihre Durchschnittspunkte zwischen den Halb-

messern (e, x, g, h) die Ekkpunkte des Gevierts sein, die also nur brauchen verbunden zu werden.

§. 75. Ein regelmäßiges Fünfekk in einen Kreis. Es erhellet dies schon aus § 29; doch gibt es noch eine andere Art, ein Fünfekk in einen Kreis zu schreiben, bei der man nicht erst versuchend den Umkreis zu theilen braucht. Ziehe (Zeich. 163) in den Kreis die 2 rechtwinkligen Kreuzdurchmesser am und vo, theile den Strahl ao in 2 gleiche Theile bei r, beschreibe mit rb den Bogen be und ziehe die Sehne be, welche eine Seite des Fünfekkes ist, und also nur 5 Mal braucht im Kreis herum getragen zu werden.

§. 76. Ein Kreis um ein regelmäßiges Fünfekk. Theile 2 Winkel des Fünfekkes in 2 gleiche Theile, und verlängere die Theilungsstriche bis zur Durchkreuzung! Der Kreuzpunkt muss der Mittelpunkt des Kreises sein, und ein Theilungsstrich der Strahl.

§. 77. Ein Kreis in ein regelmäßiges Fünfekk. Theile (Zeich. 164) 2 Seiten des Fünfekkes (hier tu und uv) in 2 gleiche Theile, und setze im Innern des Fünfekkes 2 winkelrechte Striche auf die Theilungspunkte, hier om und on. Der Kreuzpunkt dieser Striche (hier o) ist der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises, und om oder on der Strahl.

§. 78 Ein regelmäßiges Fünfekk um einen Kreis. Damit du um einen Kreis ein Fünfekk beschreiben kannst, so schreibe erst eins in dasselbe (§. 75). Ist dies geschehen, so theile (Zeich. 164) die Seiten des eingeschriebenen Fünfekkes in 2 gleiche Theile, und ziehe vom Mittelpunkt o aus durch die Theilungspunkte die Striche or, os, ov, ou, ot. Einer dieser Theilungsstriche, etwa or, wird vom Mittelpunkt aus bis zum Umkreis verlängert. Dadurch erhältst du hier on. An den Endpunkt n setze rechtwinklig mit no den Strich tu, und mache ihn so lang, dass er ou und tu

durchschneidet. So lang, als dadurch o n und t o geworden sind, mache auch o v, o r und o s, und verbinde ihre Endpunkte mit einander, so hast du das umschriebene Fünfekk.

§. 79. Ein regelmäßiges Sechsekk in einen Kreis (siehe §. 30).

§. 80. Ein Kreis um ein regelmäßiges Sechsekk (siehe §. 30).

§. 81. Ein Kreis in ein regelmäßiges Sechsekk. Ziehe (Zeich. 165) einen Strich durch das Sechsekk von einem Winkelpunkt zum entgegengesetzten, hier von a nach b, und einen andern von 2 entgegengesetzten Mitten von solchen Strichen, die nicht Schenkel der vorher erwähnten Winkel sind, hier von d bis c. Wo sich beide Striche (hier a b und c d) durchkreuzen (hier in o), ist der Mittelpunkt des einzuschreibenden Kreises, wozu o d oder o c als Strahlen dienen.

§. 82. Ein regelmäßiges Sechsekk um einen Kreis. Beschreibe da zuerst ein Sechsekk in den Kreis, und verfahre dann im Wesentlichen eben so, wie bei §. 78! —

§. 83. Ein regelmäßiges Achtekk in einen Kreis. Ziehe zuerst rechtwinklige Kreuzdurchmesser, theile darauf jeden der 4 Bogen in 2 gleiche Theile, und verbinde alle Theilungspunkte mit einander!

§. 84. Ein Kreis um ein regelmäßiges Achtekk. Ziehe zwei Durchstriche, wovon jeder in 2 Winkelpunkten sich endet, die so liegen, daſs ein freier Winkelpunkt sich dazwischen befindet, so müssen die Hälften dieser Kreuzdurchstriche Strahlen des zu beschreibenden Kreises sein.

§. 85. Ein Kreis in ein regelmäßiges Achtekk. Setze auf die Hälfte zweier neben einander liegenden Seiten rechte Winkel, und mache den Kreuz-

punkt der Schenkel zum Mittelpunkt und einen der Schenkel selbst zum Strahl des zu bildenden Kreises!

§. 86. Ein regelmäßiges Achtekk um einen Kreis. Verfahre nach der Aehnlichkeit von §. 78 und §. 82!

§. 87. Ein regelmäßiges Neunekk in einen Kreis. Man beschreibt aus einem beliebigen Umkreispunkt; Zeich. 166 aus b mit dem Kreisstrahl einen Bogen, in den Kreis (hier r c e) und fügt die dazu gehörige Sehne (hier r e) bei. Diese durchschneidet man, indem man von dem gewählten Anfangspunkt einen Durchmesser (hier b a) zieht. Der Umkreis ist so in drei gleiche Stükke zertheilt (hier durch die Punkte r, e, a.) Um das Drittel vom Drittel des Umkreises zu erhalten, zieht man vom Durchschnittspunkt der Sehne und des Durchmessers (hier von o) aus mit der Kreisstrahlöffnung einen Bogen (hier d u), verlängert bis zu ihm (hier in r d) die Sehne, zieht vom Durchschnittspunkt (hier von d) aus mit derselben Zirkelöffnung einen kreuzenden Bogen, verbindet den Kreuzpunkt mit dem Kreismittelpunkt (hier u mit c) und hat dann in der Sehne des kleinern Bogenstükkes (hier in r i) eine Seite des Neunekkes, die man in dem Umkreis herum trägt.

§. 88. Ein Geviert um ein gleichseitiges Dreiekk. Es ist Zeich. 167 das Dreiekk a o u gegeben. Theile o u durch x in 2 gleiche Theile, beschreibe mit x u von x aus den Bogen u v o, verbinde a mit x und verlängere den Strich bis zum Kreisbogen, also bis v; o u verlängere an beiden Enden, und mache x w sowohl als x m gleich x a! Dann verbinde a mit w und a mit m, und ziehe Striche von v nach u und von v nach o, welche beide zur Durchkreuzung der Striche a w und a m verlängert werden. Die beiden Kreuzpunkte i und n bilden zwei Ekken des Gevierts, so wie a und v die beiden andern.

§. 89. Ein gleichseitiges Dreiekk in ein Geviert. Es ist Zeich. 168 das Geviert a b c d gegeben. Theile das Geviert durch Kreuzgeeren, beschreibe mit einer halben Geere von der einen Ekke des Gevierts (hier von d) aus durch den Mittelpunkt und 2 Seiten des Gevierts einen Bogen (hier f g e), und verbinde die Kreuzpunkte f und e mit b, als mit dem Punkt, der d entgegen liegt, so ist f b e das verlangte Dreiekk.

§. 90. Ein gleichseitiges Dreiekk um ein Geviert. Es ist Zeich. 166 das Geviert d e f g gegeben. Theile d e und f g in 2 gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte einen Strich, der so weit verlängert wird, daſs a o = o v ist; verlängere darauf f g auf beiden Enden um die Hälfte, so daſs g c = v g u. b f = f v wird, und verbinde die Endpunkte b und c mit dem Endpunkt a!

§. 91. Ein Geviert in ein regelmäßiges Fünfekk. Zeich. 169 ist das Fünfekk a b s r c gegeben. Ziehe von c nach b einen Strich, setze an b den Strich b p in rechtem Winkel an, mache b p so lang als c b, und verbinde p mit a! Der Strich a p durchschneidet die Seite s b des Fünfekkes in o. Dieser Punkt ist eine Ekke des zu bildenden Gevierts. Von o aus werde o e gleichlaufend mit r s gezogen, und o n gleichlaufend mit b p, von n aus v n gleichlaufend mit e o, und von v aus v e gleichlaufend mit n o, und v n e o ist das Geviert, was in das gegebene Fünfekk beschrieben werden konnte.

II. Nebengeschriebene Flächen als Netze zu Körpern.

§. 92. Zeichnung von Körpernetzen. Zeichnet die Netze von Zeich. 1 bis 17, Zeich. 59 und 60, Zeich. 78, und Zeich. 87 und 88! (Man vergleiche die Bemerkung hinter §. 3!)

Anweisung. Diese Uebung enthält die Grundzüge einer wahren Flächen-Formlehre, wie die vorhergehende die einer Strich- und Winkel-Formlehre, und die nachfolgende die der Körper-Formlehre. Ich sage nur die Grundzüge, und deute damit zugleich an, dass diese Formenlehren viel weiter ausgeführt werden könnten. Ein des Gegenstandes mächtiger Lehrer, der zugleich unterrichtlichen Takt hat, wird von selbst darauf kommen, wie er diese Formenlehre weiter ausdehnen kann. Bei Uebung I könnte das mannigfaltige Durchschneiden der Striche in mehrern und in einem Punkte, mit und ohne Gleichlauf, überhaupt die ganze Josef-Schmidsche Formlehre, mitgenommen werden. Bei dieser Uebung wäre es möglich, nicht allein das Verhältniss aller in und um einander liegenden Flächen zu behandeln, sondern auch diese Verhältnisse noch zu vermehren durch Vereinigung von 3 und mehrern Flächen. Außerdem wäre die verschiedene Lage der Flächen zu einander auch hierher zu ziehen. Gleicherweise ließe sich zur folgenden dritten Uebung noch Manches hinzufügen. Allein ich glaube eher schon zu viel, als zu wenig, gethan zu haben, und möchte dem rathen, dem die Zeit gebricht, und dem es dazu wohl noch schwer fällt, sich die zur folgenden Uebung nöthigen Körper zu verschaffen, diesen ganzen dritten Abschnitt des ersten Theiles weg zu lassen, oder ihn doch sehr kurz zusammen zu ziehen. Keineswegs behaupte ich damit seine Unnützlichkeit; denn wer ihn durchmacht, wird großen Nutzen davon haben. Allein wem die Zeit sehr beschränkt ist, der fragt sich noch bei dem besten Unterricht: welcher Theil ist weniger wichtig, und kann am ersten zurükk bleiben, ohne das Ganze zu stören? Und da halte ich diesen dritten Abschnitt im ersten Theil für den, der, wenn etwas zurükkstehen muss, am ersten zurükkstehen kann.

Was das Verfahren bei dieser zweiten Uebung anbetrifft, so gibt der Lehrer dem Schüler die Aufgaben und ertheilt einzelne Winke zu ihrer Ausführung. Ueber die Aufzeichnung der Körpernetze ist gar nichts weiter gesagt, weil der Schüler sie leicht machen wird, und weil der Lehrer, da er die Netze hat, leicht von selbst dem Schüler helfen kann. Der Lehrer wird das Netzzeichnen recht bildend einrichten, wenn er den Schülern die Körper

hinstellt und so die Netze zeichnen läſſt. Das iſt eine vortreffliche Uebung, und hat darum noch besondern Werth, weil der Lehrer auf diese Weise leicht eine Abtheilung beschäftigen kann. Die Netze zu den jetzt vorgekommenen Körpern sind bei weitem leichter zu zeichnen, als die zu den Körpern, welche in der folgenden Uebung durchgegangen werden; doch können auch die nach Körpern gezeichnet werden, aber erst dann, wann die Körper gehörig durchgegangen sind.

Dritte Uebung.

Körperliche Formen-Uebergänge.

§. 93. Uebergang vom Würfel ins Achtflach. Stumpft man die Ekken eines Würfels, A,*) gleichmäßig etwas ab, so erhält man B in der Stelle der 8 Würfelekken 8 gleichseitige Dreiekke, und die Gevierte (Quadrate) sind in Achtekke verwandelt. Macht man diese Abstumpfung so stark, daſs die Schnitte sich in der Mitte der Würfelkanten berühren, so erhält man C, statt der Würfelekken ebenfalls gleichseitige Dreiekke, und die bei B vorhandenen Achtekke sind wieder in Gevierte verwandelt, deren Geeren den Seiten der ursprünglichen Würfelgevierten gleichen, und deren Ekken gerade auf die Mitten der sonst vorhandnen Würfelkanten fallen. Dieser Körper hat mithin so viele Ekken, als der Würfel Kanten besitzt, nämlich 12. Der Körper B dagegen hatte 3 Mal so viele Ekken, als der Würfel, und außer den Würfelkanten noch 3 Mal so viele Kanten, als der Würfel Ekken besitzt. Die Körper B und C haben so viele Flächen, als der Würfel Flächen und Ekken zusam-

*) Zu diesem §. sind 5 Körper nöthig, die also vorher gemacht werden müssen, vom Lehrer oder von Schülern; nämlich:

A) Ein Würfel. Das Netz dazu siehe Zeich. 14! Man macht jede Seite des Gevierts 2 Zoll lang.

men hat. Das Achtekk beim Körper B muſs wenigstens stets 2 Mal 4 gleiche Seiten haben; es kann aber auch der Fall eintreten, daſs alle 8 Seiten gleich lang sind. Die abgeschnittenen Stükke sind bei C und B Dreistumpfe (stumpfe dreiseitige Spitzsäulen), die ein gleichseitiges Dreiekk zum Grunde, und rechtwinklig-gleichschenklige gleiche Dreiekke an den Seiten haben.

Stumpft man, D, die Würfelekken so weit ab, daſs sich die Schnitte überschneiden, so bleiben die alten Würfelflächen wohl noch Gevierte in der Lage, die sie bei C hatten, aber statt der Abstumpfungs-Dreiekke treten Sechsekke ein. Die bei C vorhandenen Ekken verschwinden, dagegen treten neue Kanten ein, und weil die alten bleiben, so hat dieser Körper 24 alte und 12 neue Kanten, oder 3 Mal so viele Kanten, als der Würfel Ekken hat, und noch eben so viele Kanten, als der Würfel besitzt. Ekken hat dieser Körper 4 Mal so viel, als der Würfel Flächen besitzt, also 24; und eben so viel hatte auch der Körper B.

Macht man die Abstumpfung der Würfelekken so stark, daſs die Durchschnittsstriche gerade durch die Gseren der Würfelgevierte sich bewegen, so bleibt nichts von den Würfelflächen übrig, und es entsteht aus dem Kern des Würfels ein Achtflach (Octaeder) E. Die Mittelpunkte der Würfelgevierte bilden die Ekkspitzen des Acht-

---

B) Ein Uebergangskörper. Das Netz dazu s. Zeich. 179! ABCD = 2 Zoll, ae = 7 Strich (Linien) 10theiliges Maaſs; ai = 1 Zoll; jeder Winkel im Achtekk 135 Grad (vergl. §. 115 und §. 135!) und jede Seite im Dreiekk 1 Zoll.

C) Ein Mittelkörper, (Netz, Zeich. 180!). Jede Seite desselben, der Dreiekke und Gevierte, beträgt 1 Zoll 4 Strich.

D) Ein Uebergangskörper (Netz, Zeich. 181!) ia = $6\frac{1}{2}$ Str., ao = 8 Str., der Winkel im Sechsekk 120 Gr.

E) Ein Achtflach (Netz, Zeich. 15!) Jede Seite desselben 1. 3. 5 Str.

flaches, das darum gerade so viel Ekken, als der Würfel Flächen hat. Die Flächen des Achtflaches sind durch Abstumpfung der Würfelekken entstanden, waren in B und C gleichseitige Dreiekke, in D Sechsekke, und hier im Achtflach sind sie wieder gleiseitige Dreiekke. Das Achtflach hat so viel Kanten, als der Würfel, aber nicht in derselben Lage. Die Kanten des Achtflaches entstanden in D durch Ueberschneidung der Würfelkanten. Sie liegen im Würfel in den Strichen, welche die Mittelpunkte der Würfelgevierte im Innern des Würfels verbinden. Die Ekkaxen des aus dem Würfel geschnittenen Achtflaches sind so lang, als die Flächenaxen oder als die Kanten des Würfels; die Kanten des Achtflaches aber so lang, als die Seite eines Gevierts, das entsteht aus dem Würfelgeviert, indem man die Mittelpunkte der Geviertseiten mit einander verbindet, was bei dem Körper C der Fall war.

§. 94. Uebergang vom Achtflach in den Würfel. Stumpft man gleichmäßig die Ekken des Achtflaches A*) etwas ab, so entstehen, B, in der Stelle der Achtflachekken Geviertflächen, und die dreiseitigen Flächen werden in sechsseitige verwandelt. Der entstandene Körper B hat außer seinen 8 alten Flächen 6 neue bekommen, von seinen 12 Kanten sind noch Stükke geblieben, und 24 neue Kanten sind durch die Abstumpfung entstanden. Die 6 alten Ekken sind verschwunden, dagegen aber 4 Mal 6 neue aufgetreten. In der Form ist dies derselbe Körper, den wir unter D im vorigen §. hatten.

---

*) Das Netz von A s. Zeich. 15! Jede Seite wird 3 Zoll lang. — Das Netz von B s. Zeich. 81! ia beträgt 1 Z. ½ Str., ao $8\frac{1}{2}$ Str. — Das Netz von C s. Zeich. 180! Es ist von derselben Größe, wie das von C bei §. 93. Das Netz von D s. Zeich. 179! ia = 9 Str., ea = $5\frac{1}{2}$ Str. Das Netz von E s. Zeich. 14! Jede Seite beträgt 1 Z. 5 Str.

Stumpft man die Achtflachekken so weit ab, dass die Abstumpfungsschnitte sich gerade in der Mitte der alten Kante berühren, C, so verschwinden die 12 alten Kanten gänzlich, die Abstumpfungsflächen bleiben dabei Gevierte, und die ursprünglichen Dreiekke des Achtflaches, die bei B Sechsekke wurden, sind wieder in Dreiekke verwandelt, doch in solche, die nur den vierten Theil von den Dreiekken des Achtflaches betragen. Der Körper hat so viele dreiseitige Flächen, als das Achtflach, und so viele Gevierte, als dies Ekken hat, und so viele Ekken, als das Achtflach Kanten besaß, also 12. Kanten sind an ihm 4 Mal so viele, als das Achtflach Ekken hatte. Er ist der Form nach ganz derselbe, den wir unter C im vorigen §. hatten. Die abgeschnittenen Stükke sind Vierspitze (vierseitige Spitzsäulen), deren Grund ein Geviert ist.

Stumpft man so weit die Ekken des Achtflaches ab, dass man, D, die Kanten überschneidet, so bleiben wohl noch die ursprünglichen Achtflach=Dreiekke als Dreiekke, aber die Abstumpfungsflächen bleiben nicht mehr Gevierte, sondern sie werden Achtekke. In der Stelle der Ekken von C entstehen neue Kanten, mithin hat dieser Körper 12 Kanten mehr, als der Körper bei C, und besitzt 24 Ekken.

Schneidet man endlich die Ekken des Achtflaches so weit ab, dass von den Dreiekken des Achtflaches nichts übrig bleibt, so entsteht, E, ein Kernwürfel von dem Schal=Achtflache (ein Inwürfel von dem Umachtflach). Die Ekken dieses Kernwürfels fallen gerade in die Mitte der Dreiekke des Achtflaches, und die Kanten des Würfels treffen in die Striche, welche im Innern des Achtflaches die Mittelpunkte der Dreiekke mit einander verbinden. Die Ekkaren des Kernwürfels sind so lang, als die Flächenaxen des Schal=Achtflaches.

Man kann also aus einem Würfel durch Abstumpfung der Ekken ein Achtflach, und umgekehrt aus einem Achtflach durch Abstumpfung der Ekken einen Würfel bilden, beides in gleichen Reihen, nur in umgekehrten Verhältnissen. Was in der ersten Reihe Abstumpfungsflächen sind, das sind in der zweiten Reihe Urflächen, und die Urflächen der ersten Reihe bilden die Abstumpfungsflächen der zweiten. Der unter C in diesem und im vorigen §. erwähnte Körper steht in der Mitte zwischen Würfel und Achtflach, und trägt auch ganz die Eigenschaften beider Körper an sich. Er hat, gleich dem Würfel, 6 Gevierte, und, gleich dem Achtflach, 8 gleichseitige Dreiekke. Seine 12 Ekken entsprechen den Kantenmitten beider Körper. Er hat 2 Arten Flächenaxen, nämlich die Axen, die den Würfelflächenaxen entsprechen, und die, welche den Achtflachflächenaxen entsprechen. Seine Ekkaxen entsprechen den Kantenaxen von Würfel und Achtflach, je nachdem er von dem einen oder von dem andern durch Abschneiden der Ekken entstanden ist.

§. 95. **Uebergang vom Würfel zum Rautenzwölfflach.** Stumpft man die Kanten eines Würfels, A,*) gleichmäßig ab, so dass noch etwas von den Würfelflächen übrig bleibt, so sind die übrig gebliebenen Stükke kleinere Gevierte, deren Seiten mit den Seiten der ursprünglichen Würfelgevierte gleichlaufend liegen. Statt der Kanten des Würfels hat man aber sechsseitige Flächen erhalten, in denen zum wenigsten 4 Seiten und

---

*) Das Netz A ist Zeich. 14, und von derselben Größe, wie A §. 93. Das Netz B s. Zeich. 182! in = i z. 3 Str., no = 3½ Str., < x und m jeder 110 Gr., jeder der andern Winkel 125 Gr., die Seiten der Gevierte = in. — Das Netz zu C siehe Zeich. 183! eo = 5 Str., iu = 6 Str., die Winkel wie bei B. Das Netz zu D s. Zeich. 184! Jede Seite ist 9 Strich, die spitzen Winkel betragen 70½, die stumpfen 109½ Grad; oder ganz genau 10° 31′ 44″ und 109° 28′ 16″.

2 Seiten gleich sein müssen. Stumpft man wenig ab, B, so liegen die langen Seiten des Sechsekkes den Gevierten zu; stumpft man viel ab, so sind die Seiten, welche den neu entstandnen Ekken zu liegen, C, die längsten. Die beiden durch die Kanten-Abstumpfungen des Würfels erhaltenen Körper, B und C, haben außer den Kanten des Würfels, die verdoppelt, mithin 24, sind, noch 24 andere Kanten, die in der Gegend der alten Würfelekken sich zu einer neu entstandenen Ekke vereinigen. Solcher neuen Ekken sind also 8, jede wird von 3 stumpfen Winkeln gebildet. Außer diesen 8 Ekken ist die alte Würfelekke in 3 Ekken zerfallen, das sind 8 × 3 oder 24 Ekken, in denen 2 stumpfe Winkel mit einem rechten vereint sind.

Stumpft man die Würfelkanten so weit ab, dass nichts von den Würfelflächen als der Mittelpunkt übrig bleibt, so hat man D, das Rautenzwölfflach (Granat-Dodekaeder) einen Körper, dessen Oberfläche aus 12 Rauten besteht. Dies Rautenzwölfflach hat 6 vierkantige Ekken, die den 6 Würfelflächen entsprechen. Die Axen des Zwölfflaches, welche sich in diesen vierkantigen Ekken endigen, sind so lang, wie die Flächenaxen des Würfels, und kreuzen sich gleich diesen in rechten Winkeln. Die 8 dreikantigen Ekken entsprechen in Absicht der Lage den 8 Würfelekken, und ihre Axen sind kleiner als die, welche sich in den vierkantigen Ekken endigen. Die kleinen Geeren der Raute haben die Lage, welche die Würfelkanten hatten, und die großen Geeren haben gleiche Lagen mit den Strichen, welche im Innern des Würfels die Mittelpunkte der benachbarten Gevierte mit einander verbinden. — Das Rautenzwölfflach hat 4 × 6 oder 3 × 8 gleich lange und gleich stumpfe Kanten. Stellt man das Rautenzwölfflach auf eine vierkantige Ekke, so ist eine andre der Art oben, 4 Flächen steigen nach oben, 4 nach unten und 4 liegen senkrecht und in rechten Win-

keln zu einander. Ueberhaupt liegen an diesem Körper je vier lange Rautengeeren, die sich in einer Ebene befinden, auch in rechten Winkeln zu einander. Legt man das Rautenzwölfflach auf eine dreikantige Ekke, so gleicht es einem Sechskant, dessen beiden Endflächen von abwechselnden Kanten aus zugespitzt sind.

§. 96. Uebergang vom Rautenzwölfflach in den Würfel. Stumpft man die vierkantigen Ekken des Rautenzwölfflaches, A;*) etwas ab, so entstehen an ihren Stellen Gevierte, und die Rauten werden in Sechsekke verwandelt (siehe B und C!), weil nämlich nur ihre spitzen Winkel weggeschnitten sind, während die stumpfen bleiben. Stumpft man die vierkantigen Ekken so weit ab, dass die Schnitte gerade durch die dreikantigen Ekken gehen, so erhält man einen Würfel, D, und hat 6 gleiche Vierspitze abgeschnitten, deren Grundflächen den Flächen des entstandenen Würfels und deren Seitenflächen den halben Rauten des gewesenen Zwölfflaches gleich sind, und die spitzwinklig-gleichschenklige Dreiekke ausmachen. Die Ekken des entstandenen Würfels fallen mit den dreikantigen Ekken des umschriebenen Zwölfflaches zusammen. Es gleichen darum die Ekkaxen des Würfels den dreikantigen Ekkaxen des Rautenzwölfflaches. Die Würfelkanten liegen in der kleinen Rautengeere, und haben mit ihr gleiche Länge, und die Kantenaxen des Würfels gleichen darum den Flächenaxen des Zwölfflaches. Die Flächenaxen des Würfels sind gleich lang mit den kleinen Rautengeeren.

---

*) Das Netz zu A siehe Zeich. 184! Jede Seite beträgt 1 Z. $3\frac{1}{2}$ Str. Das Netz zu B s. Zeich. 183! eo = $5\frac{1}{2}$ Str., iu = 9 Str.; 2 Winkel jeder 110, 4 Winkel jeder 125 Gr. Das Netz zu C s. Zeich. 182! in = 1 Z. 1 Str., on = $4\frac{1}{2}$ Str.; Winkel wie bei B. Das Netz D s. Zeich. 14! Es ist von der Größe wie E §. 94.

§. 97. **Uebergang vom Achtflach zum Rautenzwölfflach.** Das Achtflach, A,*) hat 12 Kanten; werden diese gleichmäßig abgestumpft, so entstehen, B, während die alten Flächen gleichseitige Dreiekke bleiben, die nur verkleinert sind, 12 Sechsekke in der Stelle der 12 Kanten. Die 12 Kanten sind in 24 zerfallen, und außerdem finden sich an jeder ursprünglichen Achtflachsekke noch 4 neue, zusammen also auch 24 Kanten, welche in dem Grade zunehmen, in welchem die andern 24 beim Weiterschneiden abnehmen. Um jede ursprüngliche Achtflachekke liegen 4 neue Ekken, in der Form eines Gevierts, zu einander. Von den Abstumpfungsflächen laufen zwei und zwei gleich, und je vier und vier liegen in rechten Winkeln zu einander.

Schneidet man die Achtflachkanten so weit ab, dass von den Achtflachflächen nichts bleibt als der Mittelpunkt, so erhält man das Rautenzwölfflach C. Dies innere Rautenzwölfflach hat bei weitem kürzere vierkantige Axen, als die Ekkaxen des Achtflaches, wovon sie nur Theile sind. Die Flächenaxen des Achtflaches sind genau so groß, als die dreikantigen Axen des Rautenzwölfflaches, indem deren Enden genau in die Mitten der Flächen des Achtflaches fallen. Die kürzere Geere in den Rauten des Rautenzwölfflaches ist gerade so lang, als in dem Achtflach ein Strich von dem Mittelpunkt eines Dreiekkes zu dem Mittelpunkt eines anliegenden Dreiekkes im Innern des Körpers gezogen. Die vierkantigen Ekken des Rautenzwölfflaches entsprechen der Lage nach den Ekken des Achtflaches, die 8 dreikantigen Ekken des Rautenzwölfflaches aber den 8 Flächen des Achtflaches, die

*) Das Netz zu A s. Zeich 15; die Größe aber ist §. 94 unter A gegeben. Das Netz B s. Zeich. 185! in — 1 Z., oi — 7 Str., die 2 spitzen Winkel jeder 70 Gr., und die stumpfen jeder 145 Gr. Das Netz C s. Zeich. 184! Seine Größe ist die von A §. 96.

12 Flächen des Rautenzwölfflaches den 12 Kanten des Achtflaches, und die Kanten des Rautenzwölfflaches den Strichen, welche von der Mitte der Dreiekke des Achtflaches zu den Ekken desselben gezogen werden können.

§. 98. Uebergang vom Rautenzwölfflach ins Achtflach. Stumpft man die 8 dreikantigen Ekken des Rautenzwölfflaches, A,*) etwas ab, so bekommt man einen Mittelkörper, B, zwischen Achtflach und Rautenzwölfflach, ähnlich dem, welchen wir beim vorigen §. hatten, nur daſs das, was da Abstumpfungsflächen waren, hier Urflächen sind, und so umgekehrt. Stumpfen wir die dreikantigen Ekken so weit ab, daſs sich je 2 Schnitte in den langen Rautengeeren berühren, so ist aus dem Rautenzwölfflach ein Achtflach, C, gebildet. Abgeschnitten sind dabei 8 gleiche Dreistumpfe, deren Grundflächen die Flächen des Achtflaches genau dekken. Die Ekkaxen des gewonnenen Achtflachs sind ganz gleich den vierkantigen (größeren) Axen des Rautenzwölfflaches, die Kanten des Achtflaches den langen Geeren der Rauten, die Flächenaxen des Rautenzwölfflaches den Kantenaxen des Achtflaches.

§. 99. Uebergang vom Rautenzwölfflach zum Vierundzwanzigflach. Das Rautenzwölfflach A,**) hat 24 Kanten. Stumpft man diese gleichmäßig ab, so erhält man, B, sechseckige Abstumpfungs-

*) Das Netz A s. Zeich. 184! Die Größe ist §. 95 unter D gegeben. Das Netz B steht Zeich. 185. in = $8\frac{1}{2}$ Str., oi = $3\frac{3}{4}$ Str.; die Winkel 70 und 145 Gr. Das Netz zu C s. Zeich. 15! Die Größe ist in E §. 93 gegeben.

**) Das Netz A s. Zeich. 184! Die Größe dazu ist unter A §. 96 gegeben. Das Netz B s. Zeich. 186! in = $8\frac{1}{2}$ Str., lt = 4 Str., rs = 3 Str.; < xlt = 79 Gr., < rsn = 117 Gr., < r und n jeder = $121\frac{1}{2}$ Gr., < t und x jeder $140\frac{1}{2}$ Gr. Das Netz C ist Zeich. 187. Die Seite on = $8\frac{3}{4}$ Str., und nr = $6\frac{1}{2}$ Str., < 4 = 79 Gr., < 1 und 3 = 82 Gr., < 2 = 117 Gr.

flächen, während die Rauten ihre Form, bei veränderter Größe, behalten. Die Kanten des Rautenzwölfflaches verdoppeln sich nicht bloß, so daſs 48 werden, sondern es treten um jede vierkantige Ekke 4 neue und um jede dreikantige 3 neue Kanten hervor, also 6 × 4, und 8×3 neue Kanten. Im gleichen Verhältniſs vermehren sich die Ekken. Es entstehen nämlich um jede vierkantige Ekke 4, und um jede dreikantige 3 neue Ekken, also 6×4 und 8 × 3 neue Ekken. Alle Ekkaxen, sowohl die langen als die kurzen, werden durch diese Abstumpfungen verkürzt.

Stumpft man die Kanten des Rautenzwölfflaches so weit ab, daſs von den Rauten nichts weiter übrig bleibt, als der Mittelpunkt in einer vierkantigen Ekke, so hat man, C, das Vierundzwanzigflach, einen Körper, der von 24 unspätigen (unregelmäßigen) gleichen Vierekken eingeschlossen ist, wovon jedes je zwei und zwei gleiche anliegende Seiten hat. In diesen Vierekken kommen 2 Winkelarten vor, nämlich in jedem ein spitzer Winkel, von den 2 gleichen längern Seiten eingeschlossen, ein stumpfer, von den 2 gleichen kürzern Seiten eingeschlossen, und 2 gleiche spitze, von je zwei ungleichen Seiten eingeschlossen. Eben so hat der Körper 3 Arten von Ekken und 3 Arten von Axen. Nämlich 6 vierkantige Ekken entsprechen der Lage nach den 6 vierkantigen Ekken des Rautenzwölfflaches; und an diesen Ekken liegen die spitzesten Winkel. Acht dreikantige Ekken entsprechen, der Lage nach, den 8 dreikantigen Ekken beim Rautenzwölfflach, und an diesen Ekken liegen die stumpfen Winkel. Zwölf Ekken entsprechen, der Lage nach, den Mittelpunkten der 12 Rautenflächen, und an diesen 12 Ekken kommen die mittlern Winkel der Vierekke zusammen. Die 6 Axen, welche durch diese 12 Ekken begränzt werden, sind genau so lang, als die 6 Flächenaxen des äußern Rautenzwölfflaches, der Lage nach entsprechen die kürzern Kanten am Vierundzwanzigflach den halben kürzern Gee=

ren der Rauten am Rautenzwölfflach, so wie die längern Kanten den längern halben Rautengeeren. Mithin hat das Vierundzwanzigflach 12 × 4, also 48 Kanten, nämlich 24 längere und 24 kürzere. Die Theilungsstriche, die am Vierundzwanzigflach von den spitzesten zu den stumpfen Winkeln gezogen werden können, und welche die Viereкke in 2 gleiche Dreiekke theilen, entsprechen, der Lage nach, den Kanten des Rautenzwölfflaches.

§. 100. Uebergang vom Vierundzwanzigflach zum Rautenzwölfflach. Will man aus dem Vierundzwanzigflach, A,*) ein Rautenzwölfflach schneiden; so stumpft man die 12 ungleichkantigen Ekken des Vierundzwanzigflaches ab, und erhält B, bei nicht zu weit ausgedehnter Abstumpfung, statt der erwähnten Ekkenrauten, und statt der Vierekke, Sechsekke, d. h. man erhält den im vorigen §. erwähnten Mittelkörper. Stumpft man aber die ungleichkantigen Ekken so weit ab, dass die Schnitte sich in den übrigen 2 Ekkenarten berühren, so schneidet man lauter Vierstumpfe ab, deren Grundflächen Rauten sind, und erhält als Kernkörper, C, ein Rautenzwölfflach, dessen längere und kürzere Ekkaxen genau, der Lage und der Länge nach, mit den nicht abgeschnittenen längern und kürzern Ekkaxen des Vierundzwanzigflaches übereinstimmen. Die Flächenaxen des Vierundzwanzigflaches entsprechen, in Absicht auf Lage und Länge, den Kantenaxen des Zwölfflaches. Die längern Geeren der Rauten sind, gleich den innern Verbindungsstrichen, zwischen 2 benachbarten Ekken von den 6 vierkantigen Ekken, und die kürzern Geeren der Rauten sind, gleich denselben Verbindungsstrichen, zwischen 2 benachbarten dreikantigen Ekken.

---

*) Das Netz von A siehe Zeich. 187! o n = $7\frac{1}{2}$ Str., n r = $5\frac{1}{2}$ Str. Das Netz von B s. Zeich. 186! i n = $5\frac{1}{2}$ Str., l t = $2\frac{1}{2}$ Str., r s = 2 Str. Die Winkel sind §. 99 unter B angegeben. Das Netz C s. Zeich. 184! Es hat die Größe von D §. 95.

§. 101. **Uebergang vom Würfel zum Vierundzwanzigflach.** Nimmt man den Würfel A,*) und spizt, in die Flächen einschneidend, jede Würfelekke nach allen 3 Winkeln zu, so daß je 2 Schnitte von benachbarten Ekken sich in der Mitte der Würfelkanten berühren, so erhält man, B, einen Körper zwischen Würfel und Vierundzwanzigflach; denn der so behandelte Würfel hat 6 Gevierte, deren Geeren den Seiten der erst vorhandenen Gevierte gleich sind, und 8 Mal 3 stumpfwinklige gleichschenklige Dreiekke. Es sind durch diese Zuspizung so viel neue Ekken entstanden, als der Würfel Kanten hat, und in die Stelle der 12 Kanten sind 24 lange Kanten da entstanden, wo Gevierte und Dreiekke an einander stoßen, und 3 × 8 kurze, da wo die Dreiekke mit ihren gleichen Schenkeln zusammen treffen. Die durch die Zuspizung entstandene Ekke ist bei weitem stumpfer, als die Würfelekke. An der auf der Kantenmitte entstandenen Ekke liegen 6 Winkel, nämlich 2 rechte und 4 spitze. Wird die Zuspizung der Würfelekken so weit fortgesezt, daß sich die Schnitte überschneiden, so verwandeln sich, C, die Zuspizungsdreiekke in Zuspizungs-Fünfekke, während die Gevierte noch Gevierte bleiben, aber bei weitem kleiner sind. Es haben sich 24 neue Ekken und 24 neue Kanten im Vergleich zu B gebildet. Es sind 3 Arten Kanten, und eben so viele Arten von Ekken vorhanden, nämlich 6 × 4 Kanten um die 6 Gevierte; 8 × 3 Kanten ausgehend von den zugespizten Würfelekken, und 12 × 2 Kanten, welche über den verloren gegan-

---

*) Das Netz A s. Zeich. 14, seine Größe aber §. 93 A! Das Netz B s. Zeich. 188! r v = 1 Z. $3\frac{1}{2}$ Str., v n = 8 Str., < o = 117 Gr., jeder der 2 andern W. $31\frac{1}{2}$ Gr. Das Netz C siehe Zeich. 189! i o = $7\frac{1}{2}$ Str., k r = $6\frac{1}{2}$ Str., k v = $3\frac{3}{4}$ Str., < r = 117 Gr., < k und < s jeder 82 Gr., und die beiden stumpfen Winkel jeder $129\frac{1}{2}$ Gr. Das Netz D siehe Zeich. 187; die Größe davon aber §. 100 A!

genen Würfelkanten rechtwinklig liegen. Die 3 Ekkenaxen sind folgende: 6 × 4 Ekken an den 6 Gevierten, 8 Ekken in der Lage der ursprünglichen 8 Würfelekken und 12 Ekken im Mitten der 12 Würfelkanten.

Wird die Zuspitzung der Würfelekken so weit getrieben, dass von den Würfelflächen nichts übrig bleibt, als die Mittelpunkte in Ekken, so ist das Vierundzwanzigflach D, da. Die in B und C vorhandenen Kanten an den Würfelflächen und die in C vorhandenen Ekken an diesen Flächen sind verschwunden; dagegen sind 6 neue Ekken aufgetreten, liegend im Mittelpunkt der 6 weggeschnittenen Würfelflächen. Die 12 andern vierkantigen Ekken liegen auf der Mitte der sonstigen Würfelkanten, und die 8 dreikantigen Ekken in der Stelle der Würfelekken. Das Kern-Vierundzwanzigflach hat 3 längste Ekkaxen, welche den Flächenaxen des Schalwürfels, der Länge und Lage nach, entsprechen, die also gleichlaufend und gleich mit den Kanten des Schalwürfels sind.

§. 102. Uebergang vom Vierundzwanzigflach zum Würfel. Stumpft man die Hauptekken des Vierundzwanzigflaches, A,*) d. h. die vierkantigen Ekken, an denen die vier spitzesten Winkel liegen, so weit ab, dass noch keine andern Ekken berührt werden, so entsteht der im vorigen §. unter C erwähnte Körper; gehen aber die Abstufungsschnitte durch je 4 vierkantige Ekken, von den mittlern Winkeln gebildet, so entsteht der unter B im vorigen §. erwähnte Körper, und geht der Abstumpfungsschnitt durch je 4 dreikantige Ekken, so erhält man den Würfel. Dieser Kernwürfel hat Ekkaxen, die den kürzern Ekkaxen des Vierundzwanzigflachs,

*) Es sind hierzu keine besondern Netze angegeben, weil der Schüler, der bis hierher gekommen ist, schon von der Grösse absehen, und also auch bei unverhältnissmässiger Grösse die Formen-Uebergänge erkennen kann.

d. h. denen, die von den dreikantigen Ekken begränzt sind, in Absicht auf Lage und Länge, entsprechen. Die Würfelkanten gleichen den Strichen am Vierundzwanzigflach, welche man im Innern des Körpers von einer dreikantigen Ekke zu einer benachbarten ziehen kann.

§. 103. Uebergang vom Achtflach zum Vierundzwanzigflach. Spitzt man jede Ekke des Achtflaches, A,*) von allen 4 Winkeln aus zu, und macht man diese Zuspitzung so weit, daß sich auf der Mitte der Kanten die Zuspitzungsschnitte berühren, so erhält man, B, einen Körper, der von 32 Flächen eingeschlossen ist, nämlich von 8 gleichseitigen Dreiekken, wovon jedes der vierte Theil von den Flächen des Achtflaches ist, und von 8 × 3 spitzwinklig-gleichschenkligen Dreiekken, welche nämlich die Zuspitzungsflächen sind. Der neue Körper hat so viele neue sechswinklige Ekken, als das Achtflach Kanten hatte; die Kanten des Achtflaches sind in 2 zerfallen, und außerdem 8 × 3 neue Kanten entstanden.

Wird die Zuspitzung der Achtflachekken so weit getrieben, dafs die Zuspitzungsflächen sich überschneiden, C, so bleiben die Zuspitzungsflächen nicht mehr Dreiekke, sondern sie werden Fünfekke, und es entstehen neue Kanten, die gleiche Lage mit den Strichen haben, welche von den Spitzen der Achtflach-Dreiekke auf die Mitten der entgegenstehenden Kanten gezogen werden können. Es entstehen 8 × 3 neue Ekken und eben so viele neue Kanten.

Gehen die Zuspitzungsschnitte so weit, dafs von den ursprünglichen Achtflachflächen nur der Mittelpunkt in ei-

---

*) Das Netz A siehe Zeich. 15, die Größe davon §. 94 A! Das Netz B siehe Zeich. 190! r s = 4½ Str., r n = 1 Z. 1½ Str., < a = 79 Gr., r s o ein gleichseitiges Dreiekk, und r s n gleichschenklig. Das Netz C siehe Zeich. 191! i e o ist ein gleichseitiges Dreiekk; jede Seite = 9 Str., r v = 1 Z. ¼ Str., k x = 3 Str., < n = 79 Gr., < a und < u jeder 82 Gr., die 2 stumpfen W. jeder 14? ½ Gr. Das Netz D siehe Zeich. 187, und die Größe davon §. 99 C!

ner dreikantigen Ekke übrig bleibt, so ist das innere Vierundzwanzigflach, D, da, dessen 4 kürzere Ekkaxen mit den Flächenaxen des Achtflaches gleiche Lage und Länge haben. Die 3 Hauptaxen des Vierundzwanzigflaches haben gleiche Lage mit den Hauptaxen des Achtflaches, und die 6 Mittelaxen des Vierundzwanzigflaches gleiche Lagen mit den Kantenaxen des Achtflaches. Die Striche, welche benachbarte dreikantige Ekken am Vierundzwanzigflach im Innern verbinden, sind so lang als die Striche, welche am Achtflach 2 benachbarte Dreiekksmitten verbinden, und auch so lang, als die Kanten eines Kernwürfels im Vierundzwanzigflach.

§. 104. Uebergang vom Vierundzwanzigflach zum Achtflach. Stumpft man die dreikantigen Ekken des Vierundzwanzigflaches nur so weit ab, daſs die Abstumpfungsschnitte alle vierkantigen Ekken unverletzt lassen, so entsteht der beim vorigen §. unter C angegebene Körper.

Stumpft man die erwähnten Ekken aber so weit ab, daſs der Schnitt durch die drei den Abstumpfungsekken am nächsten liegenden Ekken geht, so entsteht der unter B im vorigen §. angegebene Körper. Gehen endlich die Abstumpfungsschnitte durch die vierkantigen Ekken, welche die längsten Axen bilden, so erhält man das Kern-Achtflach. In diesem Kern-Achtflach haben die Ekkaxen dieselbe Lage und dieselbe Länge, als die längsten Ekkaxen an dem Vierundzwanzigflach.

§. 105. Uebergang vom Würfel zum Vierflach.

Stellt man den Würfel A*) auf einer Fläche, so

---

*) Das Netz zu A siehe Zeich. 14! Seine Gröſse ist in A §. 93 angegeben. Das Netz zu B siehe Zeich. 192! vn = 1 Z. 7 Str., is = 8 Str., 2 Winkel im Sechsekk sind rechte, und 4 betragen jeder 1½ rechte. Das Netz zu C siehe Zeich. 13! Jede Seite beträgt 2 Z. 8 Str.

liegen 4 Ekken oben und 4 unten; stumpft man, von den obern, zwei in der Geere liegende ab und von den untern auch, doch so, dass die obern mit den untern im Kreuz liegen; so werden, B, alle 6 Gevierte in Sechsekke verwandelt, in denen je 4 und je 2 Seiten gleich lang sind. Die 4 Abstumpfungsflächen bilden gleichseitige Dreiekke.

Gehen die Abstumpfungsschnitte alle durch die Geere der Gevierten, so entsteht ein Kern-Vierflach, C, dessen 6 Kanten in den 6 Geviertgeeren liegen, also mit denen, gleiche Lage und gleiche Länge haben. Die 4 Ekken des Vierflachs liegen in den 4 nicht abgestumpften Ekken des Würfels. Das Vierflach muss bei diesem Vergleich auf einer Kante stehen. Will man bei der Vergleichung das Vierflach auf einer Fläche stellen, so muss der Würfel auf einer Ekke stehen.

§. 106. **Uebergang vom Vierflach zum Würfel.** Stumpft man die 6 Kanten des Vierflachs, A,*) ab, so entstehen, B, in ihren Stellen Sechsekke. Die Dreiekke des Vierflachs sind verkleinert. In der Stelle der spitzwinkligen Ekken des Vierflachs sind rechtwinklige Ekken entstanden.

Stumpft man die Vierflachkanten so weit ab, dass die Schnitte durch die Mittelpunkte der Dreiekke gehen, so ist der Kernwürfel C da. Vier Ekken dieses Würfels liegen unter den 4 Ekken des Vierflachs, und die 4 andern zu den vorigen 4 überszwerch stehend, liegen in den 4 Mittelpunkten der Dreiekksflächen. Die Geeren der Würfelflächen sind so lang, als ein Strich von dem Mittelpunkt eines Dreiekkes zu dem Mittelpunkt eines benachbarten Dreiekkes gezogen.

---

*) Das Netz zu A siehe Zeich. 13, und seine Größe §. 105 C Das Netz zu B siehe Zeich. 192! vn = 1 Z. 3¼ Str., is — 4½ Str. Das Netz zu C siehe Zeich. 14! Die Größe jeder Seite beträgt 1 Z.

§. 107. Uebergang vom Vierflach zum Achtflach. Stumpft man die Ekken des Vierflachs, A, *) etwas ab, so verwandeln sich, B, die gleichseitigen Dreiekke in gleichwinklige Sechsekke, und die Abstumpfungsflächen werden gleichseitige Dreiekke. Wird diese Abstumpfung so stark gemacht, daſs die Schnitte sich in den Kantenmitten berühren, so entsteht das Kern-Achtflach, C, dessen 4 Flächen Ueberbleibsel von den 4 Vierflachflächen sind, nämlich jede 1 Viertel des vorhandenen Dreiekkes, und zwar das innere Viertel. Die 4 andern Flächen sind durch Abstumpfung der Vierflachekken entstanden. Die 6 Ekken des Achtflaches treffen in die 6 Kantenmitten des Vierflaches. Die Ekkaxen des Achtflaches entsprechen, der Länge und der Lage nach, den Kantenaxen des Vierflachs. Die Kanten des Achtflachs sind halb so lang, als die Kanten des Vierflachs, oder so lang als die Striche, welche von der Mitte des einen Dreiekkes beim Vierflach zur Mitte eines andern im Innern gedacht werden können. Die 4 abgeschnittenen Körper sind ebenfalls Vierflache von gleichen Flächen mit dem Kern-Achtflach.

§. 108. Uebergang vom Achtflach zum Vierflach. Stellt man das Achtflach, A, **) auf eine Ekke, und schneidet von zwei oben sich entgegen liegenden und zwei unten sich entgegen liegenden Flächen, wovon das obere Paar mit dem untern Paar sich kreuzt, tafelartige Stükke ab; so verwandelt man, B, diese 4 Flächen in gleichwinklige Sechsekke, während die andern 4 Flä-

---

*) Das Netz zu A siehe Zeich. 13, und die Größe §. 106 A! Das Netz zu B siehe Zeich. 193! rn = 1 Z. 1 Str., ns = 6 Str., jeder Winkel 120 Gr. Das Netz zu C siehe Zeich. 15, und die Größe dazu §. 93 E!

**) Das Netz zu A siehe Zeich. 15! Jede Seite ist 2 Z. 1½ Str. Das Netz zu B siehe Zeich. 193, und die Größe §. 107 B! Das Netz zu C siehe Zeich. 13! Jede Seite ist 1 Z. 4 Str.

chen sich verkleinern. Schneidet man von den 4 Flächen so dikke Tafeln ab, dass die Durchschnitte durch die Mitten der andern 4 Flächen gehen, und sie also ganz vertilgen, so dass an ihrer Stelle in ihrer Mitte nur dreikantige Ekken bleiben, so ist das Achtflach in ein Vierflach, C, verwandelt, dessen Kanten so lang sind, als ein Strich im Achtflach von einer Dreiekks-Mitte zur entgegen liegenden gezogen.

§. 109. Verhältniss zwischen dem Zwölfflach aus Fünfekken und zwischen dem Zwanzigflach. Das Zwölfflach aus Fünfekken hat 12 Flächen, 20 Ekken und 30 Kanten; das Zwanzigflach (Ikosaeder) aber 12 Ekken, 20 Flächen und 30 Kanten; mithin stimmen in beiden die Kanten, dagegen die Ekken und Flächen wechseln. Das Zwanzigflach hat so viele Ekken, als das fünfekkige Zwölflach Flächen, und so viele Flächen, als dieses Ekken. Daraus folgt, dass man aus dem fünfekkigen Zwölfflach ein Zwanzigflach bildet, indem man regelmäßig die Ekken abstumpft, und dass man auf dieselbe Weise aus dem Zwanzigflach, durch Abstumpfung der Ekken, ein Zwölfflach aus Fünfekken bildet. Beide Körper verhalten sich so zu einander, wie Würfel und Achtflach, die auch durch Ekken-Abstumpfung in einander übergehen. Ist das fünfekkige Zwölfflach der Schalkörper und das Zwanzigflach der Kernkörper, so liegen die Ekken des Zwanzigflachs in den Flächenmitten des fünfekkigen Zwölfflachs, und die Flächenaxen des Zwölfflachs entsprechen den Ekk-Axen des Zwanzigflachs. Ist aber das Zwanzigflach der Schalkörper, so liegen die Ekken des fünfekkigen Zwölfflachs in der Mitte der Flächen des Zwanzigflaches.

§. 110. Verhältniss der beiden behandelten Körper zu dem Dreißigflach. Hält man das Dreißigflach*) (Triakontaeder) zwischen einer

---

*) Das Netz siehe Zeich. 194! Die spitzen Winkel betragen 63½ die stumpfen 116½ Gr., oder genau 63° 26′ 38″ und 116° 33′ 22″.

senkrechten fünfkantigen Axe, so erblikkt man die 30 Rauten, wovon dieser Körper eingeschlossen ist, nämlich 5 liegen an dem obern Axenende und 5 an dem untern, 5 liegen oben und 5 unten in der Queere, und 10 bilden in der Mitte einen Gürtel. An dem Körper befinden sich 2 Arten von Ekken, nämlich 12 fünfkantige und 20 dreikantige, oder 12 mit spitzen und 20 mit stumpfen Winkeln. Sechszig gleich-lange Kanten (12×5 oder 20 × 3) sind an ihm. Stellt man den Körper so, dass eine fünfkantige Axe senkrecht sich befindet, so sind auch die 10 Flächen mit den 10 Kanten, welche den mittlern Gürtel bilden, senkrecht; daraus ergiebt sich, daß mit den fünfkantigen Axen je 10 Flächen und 10 Kanten gleichlaufend liegen. Das Dreißigflach entsteht durch Abstumpfung der 30 Kanten des fünfekkigen Zwölfflachs. In der Mitte der fünfekkigen Flächen berühren sich je 5 Abstumpfungsschnitte und bilden da die fünfkantige Ekke. Die fünfkantigen Ekkaxen eines Kern-Dreißigflachs stimmen also mit den Flächenaxen des Schalzwölfflachs, in Absicht auf Länge und auf Lage. Die 20 dreikantigen Ekken haben dabei dieselbe Lage, welche die 20 Ekken des Zwölfflachs einnehmen, aber sie sind kürzer. Die kleinen Geeren der Rauten haben die Lage von den Kanten des Zwölfflachs aus Fünfekken. — Will man aus dem Dreißigflach das fünfekkige Zwölfflach schneiden, so stumpft man die fünfkantigen Ekken bis zu den dreikantigen Ekken ab, die Ekkaxen des Zwölfflachs stimmen dann in Lage und Länge mit den dreikantigen Ekkaxen des Dreißigflaches. Die Kanten des Kern-Zwölfflachs treffen gerade in die kurzen Rautengeeren des Dreißigflachs, und stimmen also mit diesen in Absicht auf Lage und Länge. — Das Dreißigflach entsteht aus dem Zwanzigflach, durch Abstumpfung der 30 Kanten, wenn diese Abstumpfung so stark ist, dass je 3 Abstumpfungsflächen in einer Flächenmitte des Zwanzigflachs zusammen kommen, und da eine dreikantige Ekke bilden. Die drei-

kantigen (die kürzern) Ekkaxen des Dreißigflachs treffen mit den Flächenaxen des Zwanzigflachs überein. — Will man dagegen aus dem Dreißigflach das Zwanzigflach bilden, so werden die 20 dreikantigen Ekken des Dreißigflachs bis zu den fünfkantigen Ekken hin abgestumpft; beide Körper stimmen dabei in ihren längsten Axen. Die Kanten des Zwanzigflachs treffen gerade in die langen Rautengeeren des Dreißigflaches.

Das Dreißigflach verhält sich genau so zu dem fünfekkigen Zwölf- und dem Zwanzigflach, wie das Rautenzwölfflach zu dem Würfel und dem Achtflach; was man sogleich ersehen kann, wenn man ihre beiderseitigen Uebergänge mit einander vergleicht.

§. 111. **Verhältniſs der drei zuletzt behandelten Körper zum Sechszigflach.** Das **Sechszigflach***) (Hexaekontaeder) entsteht durch regelmäßige Abstumpfung der 60 Kanten des Dreißigflachs, wie das Vierundzwanzigflach durch Abstumpfung der 24 Kanten des Rautenzwölfflachs. Die Flächen sind, wie beim Vierundzwanzigflach, unregelmäßige Vierekke. Je 4 Abstumpfungen der Kanten des Dreißigflaches bilden in einer Flächenmitte eine vierkantige Ekke. Das Sechszigflach hat also 30 vierkantige Ekken, die Ekkaxen bilden, welche den Flächenaxen des Schal-Dreißigflaches entsprechen. Außerdem hat das Sechszigflach 12 fünfkantige und 20 dreikantige Ekken, in der Lage von den fünf- und dreikantigen Ekken des Dreißigflachs. — Stumpft man die 30 vierkantigen Ekken des Sechszigflachs bis zu den drei- und fünfkantigen Ekken ab, so erhält man das Dreißigflach aus dem Sechszigflach, und zwar so, daſs die fünf- und dreikantigen Axen in beiden Körpern mit einander übereinstimmen. — Wollen wir aus dem fünfekkigen Zwölfflach das Dreißigflach bilden, so spitzen wir

*) Das Netz siehe Zeich. 195! $\angle$ 1 = 119 Gr., $\angle$ 2 und 3 jeder 88½ Gr., $\angle$ 4 = 64 Gr.

jede der 20 Ekken des Zwölfflachs mit 3 Schnitten zu, die Schnitte auf die Flächen gesetzt. — Das Zwölfflach wird aus dem Sechszigflach geschnitten, wenn man die 12 fünfkantigen Ekken bis zu 5 dreikantigen wegschneidet. — Aus dem Zwanzigflach erhält man das Sechszigflach, indem man die Ekken des Zwanzigflaches mit 5 Flächen zuspitzt, und aus dem Sechszigflach das Zwanzigflach, indem man die 20 dreikantigen Ekken des Sechszigflaches abstumpft.

Anweisung. Die Betreibung dieses Abschnittes erfordert nothwendig die Körper, wozu die Neze hier geliefert sind. Wer die zu Anfang von uns gebrauchten Körper gemacht hat, wird auch die zu dieser Uebung gehörigen anfertigen können. In den Anmerkungen finden sich die nothwendigen Angaben dazu, die von richtigen Körpern entlehnt sind. Soll der Schüler recht ordentlich in die körperliche Formenbildung eindringen, und soll er durch das hier Behandelte weiter zu eignen Forschungen und Versuchen getrieben werden, so muſs er selbst alle vorkommenden Körper sich machen, und das außer der Schule, weil der Schulraum und die Schulzeit derlei Arbeiten nicht erlauben. Das Verfertigen der Körper aus Papp-Nezen hat für kleinere und mittlere Schüler die eine Schwierigkeit, daſs das Schneiden der Pappe einige Kräfte erfordert. Nimmt man dünne Pappe, was in mancher andern Hinsicht auch räthlich ist, so wird diese Schwierigkeit vermindert. Das Zeichnen der Neze geschieht, wie das bei der vorigen Uebung schon angegeben wurde, in der Schule, und ist eine sehr gute Uebung. Man fängt mit den leichtern Körpern dabei an. Da, wo die Winkel müssen gewisse Grade haben, sind diese angegeben. Am besten zeigt man die Uebergänge der Körper durch würkliches Schneiden. Man wählt zu diesem Behuf sich Thon oder Lehm aus, den man zu einem sehr festen Teig bildet, der sich nur mit Mühe eindrükken läſst. Aus einer solchen Masse formt man durch Schneiden, Schlagen, Drükken und Pressen den Schalkörper; und hat man ihn, so schneidet man daraus den Kernkörper. Die Behandlung des Lehms und des Thons muſs auch außer der Schule geschehen. Aber fertige Schalkörper

können in die Schule mitgebracht werden, zum Ab- und Ausschneiden. Auch sind Holzkörper recht gut zu gebrauchen, zumal wenn man sie aus leicht schneidbarem Holz gemacht hat. Eben so eignen sich manche weiche Steinmassen zu diesen Schnitzungen. Hat der Lehrer nichts anderes vorräthig, so können Rüben und Kartoffeln aushelfen. Recht gut eignet sich auch die Seife zu solchen Körperschneidungen; doch viele Körper daraus zu schneiden, möchte in anderer Hinsicht nicht räthlich sein. Um sich mit den Schnitten nicht zu verwirren, muss man sich die Schnittlinien vorher aufzeichnen. Einige Schneideübungen müssen die Schüler durchaus machen. —

Die Uebergänge der letzten Körper, nämlich vom Zwölfflach zum Sechszigflach, sind nicht durch besondere Körpernetze erläutert; denn der Schüler, der alle vorherigen Uebergänge aufgefasst hat, wird im Stande sein, in der Einbildungskraft die Schnitte zu machen, ohne dass seinem sinnlichen Auge Hülfe geleistet wird. Für den Lehrer, welcher Lust hat, diesen Gegenstand der Körperbildung, mit Hinsicht auf die Körperbildung bei den Steinen, näher kennen zu lernen, ist zu empfehlen der schon angeführte: Versuch eines ABC-Buchs der Krystallkunde, von Karl von Raumer, Bergrath und Professor zu Halle. Erster Theil. Berlin, bei Reimer 1820. Mit Kupfern. 1 Thlr. 16 Gr., nebst Nachträgen dazu. Berlin, eben daselbst, 1821. — Wer eine Anleitung zur Netzbildung von Körpern wünscht, der findet sie in folgender Schrift: „Netze zu Krystall-Modellen, gezeichnet und beschrieben von R. Wakkernagel. Mit einer Vorrede von K. v. Raumer. Erstes Heft. Berlin, bei Reimer, 1821. Herr R. Wakkernagel beabsichtiget gleichfalls eine Raumlehre herauszugeben, worauf hier im Voraus aufmerksam gemacht wird. Seine Spracharbeiten lassen etwas Gediegenes erwarten.

Zweiter Theil: Vergleichungen und Messungen.

Erste Uebung.

Das Messen und Vergleichen von Strichen und Winkeln.

I. Grade Striche und Richtungen.

§. 112. Zwei ungleich lange Striche. (Erklärung.) Von zwei graden Strichen, die nicht gleich lang sind, muss der eine länger und der andre kürzer sein. — Es kann ein grader Strich 2, 3, 4 u. s. w. Mal länger sein, als ein anderer. Mit kürzern Strichen kann man längere messen *) Man legt das Maaß dabei dicht an das zu messende, und sieht zu, wie oft der kürzere Strich (das Maaß) in dem längern (in dem zu Messenden) enthalten ist. Ist das Maaß und das zu Messende gleich, so müssen sich beide Striche (Richtungen), wenn man sie auf einander legt, dekken; und findet diese Dekkung statt, so müssen auch beide gleich sein.

§. 113. Zwei grade Striche neben einander. (Erklärung.) Zwei grade Striche, dicht neben einander gelegt, müssen sich an allen Punkten berühren. — Darauf gründet sich die Prüfung von der Richtigkeit der Lineale (Reißschienen, Richtscheite). Man legt nämlich beide Endekken auf einer

---

*) Anmerkung. Der Begriff messen kann hier näher erörtert und zuletzt also bestimmt werden: „untersuchen, wie oft eine bekannte Größe in einer unbekannten enthalten ist."

Seite an einen Strich, von dem man ganz sicher weiß, dass er gerade ist, und sieht nun zu, ob das Lineal an allen Stellen gleich anstößt; oder man hält die Kante desselben auf eine Fläche, von der man sicher weiß, dass sie ganz glatt ist, z. B. auf einen Spiegel, und sieht zu, ob die Kante überall einen Strich auf der Fläche berührt. Oder man hält 2 Lineale mit ihren Kanten genau an einander gegen das Licht, und sieht, ob man durchschauen kann.

§. 114. Längenmaaße. (Erklärung.) Die Maaße, welche man gewöhnlich bei sich hat, sind Daumbreite, Fingerlänge, Handlänge, Spanne, ein Fuß, ein Schritt,*) eine Armlänge (eine Elle), eine Menschenlänge, eine Klafter (von den Fingerspitzen der einen Hand bis zu den Fingerspitzen der andern Hand). Im Preußischen giebt es, wie in andern Ländern, künstliche Maaße. Die Preußische Ruthe (doppelte Klafter) enthält 12 Fuß, der Fuß 12 Zoll (Länge eines Fingergliedes oder starke Daumbreite), und der Zoll enthält 12 Striche oder Linien. Die preußische Elle enthält 25½ Zoll, ist also länger, als 2 Fuß sind, und die preußische Meile macht 2000 Ruthen aus. Zum Messen kurzer Längen hat man Maaßstäbe, für ausgedehntere Richtungen Messketten **) und Mess-

*) Der Schritt dient im gemeinen Leben sehr häufig zum Messen. Will man diese Messart vervollkommnen, so bindet man sich einen Faden zwischen die Füße, welcher bewürkt, dass alle Schritte gleich werden. Um das Nachzählen nicht nöthig zu haben, kann man sich eines Schrittzählers, eines kleinen Uhrwerkes, bedienen, der wie eine Taschenuhr eingestekkt und durch einen, an einen Haken geknüpften, Faden, der über das Knie weggeht, in Bewegung gesetzt wird, so dass jede Kniebeugung sich, vermittelst des Fadens, dem Schrittzähler mittheilt.

**) Kleinere Räume, in Gärten, Höfen und Häusern, misst man auch wohl mit Messstangen; allein bei größern Richtungen sind

schnüre.*) Man bezeichnet Ruthen, Fuß, Zoll und Striche auf folgende Art:

Ruthen°, Schuh′, Zoll″, Strich‴; z. B. 60°, 10′, 3″, 4‴ heißt 60 Ruthen, 10 Schuh, 3 Zoll und 4 Striche.

§. 115. Der Kreisbogen als Winkelmaaß. (Erklärung.) Alle Winkel werden mit Kreisbogen gemessen. Um genau darin zu verfahren, theilt man überall und jeden Kreis in 360 Theile, die man Grade nennt. Ein rechter Winkel hat also 90 Grade, ein halber rechter 45, und Winkel über 90 Grade sind stumpfe und unter 90 Grade spitze. Diese stumpfe und spitze lassen sich genau nach Graden angeben.

§. 116. Unmessbarkeit des Punktes. (Erklärung.) Einen Punkt kann man nicht messen; alle Punkte sind gleich groß; keiner ist größer und kleiner als der andere. Bezeichnen wir auch den einen als größer, so ist das eine unvollkommne Bezeichnungsart.

§ 117. Ein grader Strich zwischen zwei Punkten. (Anschauung.) Zwischen 2 Punkten kann man nur einen graden Strich ziehen, aber viele krumme.

§. 118. Folgerungen aus dem vorigen §. und Anwendung desselben.

---

sie unbequem, und man verliert leicht die Richtung dabei. Sonst bediente man sich der Meßreifen mit einem Pflokke. Man kollerte diese vor sich hin. Die Meßwagen, mit denen man Straßen ausmisst, haben ein Räderwerk von bestimmtem Maaß, ein Pflokk daran setzt ein Werk in Bewegung, das genau die zurükkgelegten Räume angibt.

*) Die Meßschnüre, aus Hanf oder Flachs, eignen sich nicht für wichtige Messungen; denn in feuchter Luft ziehen sie sich zusammen, und werden kürzer, in trokkener dehnen sie sich aus, und werden länger.

1) Liegen zwischen 2 Punkten mehrere Striche, und kann man beweisen, dass einer derselben gerade ist; so müssen die übrigen alle krumm sein. Zwischen zwei Städten kann es nur einen ganz geraden Weg geben; gewöhnlich sind alle Wege etwas ungerade.

2) Legt man 2 grade Striche so auf einander, dass Endpunkt auf Endpunkt fällt, so müssen beide sich dekken.

3) Hat man die beiden Endpunkte eines geraden Striches angegeben, so ist damit der ganze Strich angegeben; weil nur ein grader Strich zwischen diesen Punkten möglich ist.

4) Will man ein Papier in einem graden Striche einbeugen, so braucht man nur die Einknikkung an den beiden Enden des Strichs zu machen, die Einknikkungspunkte festhalten, und durch Streichen und Drükken den Kniff vollenden.

5) Will man eine Baumreihe in gerader Richtung setzen, so muss bei der Einsetzung jedes einzelnen Baumes geäugelt werden, wenn man nicht eine Schnur vorher gezogen hat. Dasselbe gilt von der Errichtung eines Grabens, eines Zaunes u. s. w.

6) Der Hauptmann, der eine Soldatenreihe richtet, stellt sich seitwärts an den Flügelmann und äugelt die Reihe bis zum Letzten hinunter. Sieht er den Letzten nicht, wenn er ein wenig vortritt, so muss in der Mitte Einer zu weit vorstehen. Erscheint ihm die Reihe wo als unterbrochen, so müssen welche zu weit zurükstehen.

§. 119. Der grade Weg der kürzeste. (Anschauung.) Zwischen 2 Punkten ist der grade Strich der kürzeste Weg. Jeder krumme Strich zwischen denselben Punkten ist länger.

§. 120. Folgerungen aus dem vorigen §.
1) Der gradeste Weg von einem Ort zum andern muss auch der nächste sein.

2) Wenn zwei Wege von dem einen Ort zum andern, nach irgend einer richtigen Ausmessung, gleich lang sind; so müssen beide Wege Umwege sein, da es nur einen nächsten Weg gibt.*)

3) In jedem Dreiekk ist ein Strich kürzer, als die beiden andern, weil jener der nächste Weg ist von dem einen Punkt zum andern, jene beiden aber einen Umweg machen. Ein Schriemweg ist auf ebenen Flächen näher, als ein Weg, der in einem Winkel geht. Viele Fußsteige sind solche Schriemwege.

4) Man kann keine Fläche mit zwei geraden Strichen einschließen.

§. 121. Entfernung zweier Punkte. (Erklärung.) Unter der Entfernung zweier Punkte versteht man die Länge (Größe) des kürzesten Striches zwischen beiden. Man misst also, um dieselbe zu finden, den graden Strich zwischen den gegebenen Punkten, weil dieser der kürzeste ist. Messen zwei Leute die Entfernung zweier Punkte in gebogenen Strichen, so können sie was ganz Verschiedenes herausmessen, und messen falsch.

Auf dem Felde kann man die Entfernung zweier Punkte nicht wie auf dem Papier, durch Zeichnung eines Striches bemerklich machen. Die Endpunkte deutet man durch eingestekkte weiße Stäbe an, die man Messstäbe nennt. Ist aber die Entfernung beider Endpunkte sehr weit von einander, so pflegt man Mittelstäbe zu setzen. Nothwendig wird das, wenn die Entfernung der beiden Endpunkte viel mehr beträgt, als die Messkette lang ist, womit die Entfernung gemessen werden soll. Bei der Einstekkung dieser Mittelstäbe muss man sehr vorsichtig

*) Es ist bei einigen Oertern unmöglich, den würklich graden Weg zu finden; z. B. in Berggegenden, wo man den graden Weg durch einen Berg erst durchschlagen müsste.

sein, damit sie in die würkliche Richtung kommen. Es sind zwei Leute erforderlich, um dies zu bewürken. Der Eine stellt sich vor den Anfangsstab, und der Andere stekkt auf dessen Winke die Stäbe so, dass sie weder von dem Anfangs- noch von dem Endstab aus gesehen werden können, wenn man von dem einen zu dem andern hin äugelt (visirt).

§. 122. Zwei Striche, theilweis in einander, in einer Richtung. (Anschauung). Fallen 2 grade Striche zum Theil in einander, so haben sie ganz einerlei Richtung. — Zur Verdeutlichung Folgendes: Nimmt man 2 grade Drathe und legt von jedem die Hälfte auf die Hälfte des andern, so müssen auch die übrigen Hälften dieselbe Richtung haben. Oder zeichnet man (Zeich. 33, b) zuerst xv und darauf sr, so dass das Stükk sv von sr auf dem Stükk sv von xv liegt, so muss auch vx mit sr eine Richtung haben, oder beide Striche müssen einen graden Strich bilden.

§. 123. Anwendung des vorigen §.

1) Will man, vermittelst der Schiene, (des Lineals) einen graden Strich verlängern, so braucht man den Schienenrand nur genau in diesen Strich oder in einen Theil desselben zu legen.*) So ist es möglich, obgleich unbequem, mit einer kurzen Schiene sehr lange Striche zu ziehen.

2) Will man auf dem Felde einen langen Strich

*) Man legt die Schienen mehr neben den zu verlängernden Strich, als in denselben, weil man doch mit dem Blei oder der Feder neben die Schiene hin fahren muss, und darum der neue Strich neben der Schiene entsteht. Da Feder oder Bleistift auch noch Platz einnehmen, so legt man die Schiene oft wohl einen Strohhalm breit neben den Strich.

ausstekken, und hat man wenig Stäbe, so stekkt man erst einen kürzern aus, lässt davon die letzten Stäbe stehen, zieht die erstern aus und rükkt mit diesen von den letztern weiter vor.

3) Es ist möglich, auch über Berge und Tiefen, durch Wälder und sonstige Hindernisse eine grade Richtung von einem Punkt zum andern, die weder zur Rechten noch zur Linken abweicht, durch zu bringen, und so schnurgrade Wege von einem Ort zum andern anzulegen. Es ist z. B. ein Weg von a bis d (Zeich 121) durch zu führen, und zwischen beiden Oertern befindet sich ein Berg. Um die Richtung a d zu treffen und zu bezeichnen, geht einer mit 2 Stäben auf den Berg, während einer von a aus und der andere von d aus äugelt. Der auf dem Berg stekkt die 2 Stäbe so in b und c auf der Höhe des Berges ein, daſs der, welcher von a äugelt, a b c in einer Richtung sieht, und der, welcher von d aus äugelt, d c b. Ist dies der Fall, so muſs b c d eine solche Richtung wie a b c haben, mithin a d in einer Richtung sich befinden, die, wenn sie ein grader wagerechter Strich sein sollte, durch den Berg gehen müsste.

§. 124. Durchschneidung zweier graden Striche. (Anschauung.) Zwei grade Striche können sich nur in einem Punkte schneiden; denn je länger man sie nach ihrer Durchschneidung macht, desto mehr entfernen sich ihre Enden von einander.

§. 125. Folgerung aus dem vorigen §. Zwei Wege, die sich mehrmals durchkreuzen, können nicht beide grade sein.

II. Kreisstriche.

§. 126. Mittel, um Kreise zu schlagen. (Erklärung.) Auf dem Felde hat man 2 Arten, Kreise zu schlagen: entweder nimmt man einen Stab, der auf beiden Enden Haken hat, schlägt den einen Haken ein

und kratzt mit dem andern, drehend, den Umkreis; oder man bedient sich einer Messkette, mit einem eisernen Endring, hängt diesen über einen Pfahl, der als Mittelpunkt dient, und dreht darauf, stets straff die Kette haltend, dieselbe herum, indem man mit einem angebrachten Spitzpfahl ritzet. — Auf dem Papier gebraucht man den kleinen Zirkel, und auf Schultafeln den Stangenzirkel, deren beider Schenkel man beliebig erweitern kann.

§. 127. Zwei Durchmesser in einem Kreise. (Anschauung.) Wenn 2 Durchmesser (Diameter) in einem Kreise sind, so müssen sie sich schneiden, und zwar im Mittelpunkt des Kreises, und beide Durchmesser müssen sich hälften.

§. 128. Der Durchmesser, der längste Strich im Kreise. (Anschauung und Lehrsatz.) Der Durchmesser ist der größte grade Strich in einem Kreise. Es lässt sich dies auch beweisen. Es muss z. B. (Zeich. 92, b) sp der größte Strich in dem gegebenen Kreise sein; denn alle Striche, die man daneben ziehen kann, sind kleiner. Es sind sa und si daneben gezogen; diese müssen kleiner sein; denn *) si < sc + ci (weil 2 Striche in einem Dreieck größer sind, als der dritte).

$$\frac{sc + ci = sp}{sc < sp}$$

*) Das Zeichen < wird für Größe und Kleinheit gebraucht, die Oeffnung deutet auf Größe, die Spitze auf Kleinheit; z. B. a < b heißt: a ist kleiner als b; und a > b heißt: a ist größer als b. Das Zeichen + wird für die Vermehrung (additio) gebraucht, und heißt also: hinzugefügt, und u. s. w. Der Strich, unter einer Gleichung deutet an, dass das Darunterstehende ein Schluss, ein Ergebniss aus dem Darüberstehenden ist, und heißt also: folglich, mithin, also.

Eben so ist

$$\begin{array}{l} sa < sc + ca \\ sc + ca = sp \\ \hline sa < sp. \end{array}$$

§. 129. Strahlen und Durchmesser in gleichen und in selben Kreisen gleich. (Anschauung.) Weiß man bei einem Kreis oder in gleichen Kreisen die Länge eines Strahles (Radius), oder eines Durchmessers (Diameters), so braucht man nicht noch einen zweiten Strahl, oder einen zweiten Durchmesser zu messen; denn in selben oder in gleichen Kreisen sind Strahlen und Durchmesser gleich.

§. 130. Der Strahl, die Hälfte des Durchmessers. (Anschauung.) Die Durchmesser sind in selben oder in gleichen Kreisen noch ein Mal so lang, als die Strahlen, und diese also stets die Hälften von jenen. Weiß man darum die Länge der Strahlen, so braucht man nicht erst die Durchmesser zu messen, und so umgekehrt.

§. 131. Gleiche Umkreise und Kreise bei gleichen Strahlen und Durchmessern. (Anschauung.) Sind in 2 Kreisen die Durchmesser gleich lang oder die Strahlen, so müssen es auch die Umkreise sein, und legt man die Kreisflächen auf einander, diese sich dekken, und also ebenfalls gleich sein. Aus einem gegebenen Punkt kann man mit einem Strahl deshalb nur einen und denselben Kreis machen. Liegen von einem gegebenen Mittelpunkt mehrere Punkte in gleicher Entfernung, und geht der Umkreis durch einen dieser Punkte, so muss er durch alle gehen.

III. Winkel.

§. 132. Dekkung der Winkel. (Erklärung.) Alle Winkel dekken sich und sind sich gleich, wenn ihre

Schenkel richtig auf einander fallen, und nicht neben einander. Die Länge der Schenkel ist ganz gleichgültig dabei. So dekken sich Zeich. 86, a und b.

§. 133. Folgerungen.

1) Alle rechte Winkel müssen sich dekken, nicht aber alle spitze und alle stumpfe.

2) Alle Winkel, die gleiche Grade haben, dekken sich.

3) Alle Winkel, welche sich dekken, müssen gleiche Grade haben.

§. 134. Winkelhaken und Winkeldreiekk. (Erklärung.) Zur Zeichnung von rechten Winkeln bedient man sich wohl eines Winkelhakens, oder zweier zusammengefügter Richtscheite. Vorzüglich bedienen sich die Bauhandwerker eines Winkelhakens. Sehr bequem ist ein Winkeldreiekk (Zeich. 122)., ein Dreiekk, dessen 3 Winkel 90, 60 und 30 Grad, also 1, $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ rechten Winkel betragen.

§. 135. Der Gradbogen. (Erklärung.) Zur Messung der Winkel auf dem Papier, und zur Darstellung gleicher Winkel kann man sich des Papier-Winkelmessers (Zeich 61), auch Gradbogen, Theilscheibe (Transporteur) genannt, bedienen, und misst damit die Winkel nach Graden ab. Allein, wie vorher (§. 13 und §. 58) gezeigt ist, so kann man auch bloß mit einem Zirkel und Richtscheit gleiche Winkel machen, und selbst ohne Zirkel mit bloßen Maaßstäben, indem man den Winkel, den man einem andern gleich machen will, in ein Dreiekk verwandelt.

§. 136. Der Feldwinkelmesser. (Erklärung.) Auf dem Felde misst man die Winkel mit einem Feldwinkelmesser (Astrolabium; Graphometer). — Der Feldwinkelmesser ist ein so eingerichteter Halbkreis, als der Papier-Winkelmesser; aber auf seinem Mittelpunkt sind in Scheitelwinkeln 2 Schienen angebracht,

und an den Enden dieser Schienen in rechten Winkeln Blättchen zum Aeugeln. Das eine Blättchen hat eine senkrechte Ritze, und das andere eine rechtekkige Oeffnung, in deren Mitte ein Pferdehaar gespannt ist. Man äugelt durch die Ritze auf das Pferdehaar zu der zu messenden Richtung hin, und hat man das mit beiden Richtscheiten gethan, so zeigen ihre Lagen die Winkelgrade auf der darunter liegenden Scheibe an. Die Blättchen heißen Absehe r (Diopte rn). Der ganze Winkelmesser ruht wagerecht auf einem Gestell, welches etwa so hoch ist, wie das menschliche Auge.

§. 137. Winkelscheibe und Meßtischchen. (Erklärung.) Will man den Winkel nicht nach Graden wissen, so braucht man nur eine Scheibe oder ein viereckiges Reißbrett, welche wagerecht auf einem Gestelle stehen. Man legt darauf Papier, und durch ein Aeugel-Richtscheit nimmt man die Winkel mit dem Auge auf und zeichnet sie sogleich aufs Papier, das auf dem Holz fest liegen muss. Solche Scheibe heißt die Zollmann'sche Winkelscheibe, und solch Reißbrett ein Mess-Tischchen.

§. 138. Drei Punkte als Winkel-Lage. (Erklärung). Durch drei Punkte, wovon der eine der Winkelpunkt sein soll, ist die Weite eines Winkels genau bestimmt. So bestimmen z. B. (Zeich. 37) die Punkte dec, wovon e den Winkelpunkt bildet, den Winkel dec genau, weil nothwendig die Schenkel zwischen de und ce als grade Striche fallen müssen.

§. 139. Dekkung eines Winkels durch mehrere. (Anschauung.) Zwei Winkel können einen dritten dekken, und einer 2 oder mehrere, nämlich, wenn sie an Graden gleich sind; ein rechter Winkel kann gedekkt werden von 2 spitzen, davon einer 60, der andre 30 Grad enthält

u. s. w., oder ein rechter Winkel und 2 spitze, jeder von 20 Grad, dekken zusammen einen stumpfen von 130 Grad.

§. 140. Nebenwinkel, gleich zwei rechten. (Lehrsatz). Zwei Nebenwinkel, zusammen genommen, dekken 2 rechte, zusammen genommen. Dies ist schon §. 11 gezeigt. Es leuchtet aber auch noch aus Folgendem hervor: Die beiden Winkel (Zeich. 72) bec und cea sind 2 rechte; denn schneidet man von dem stumpfen Winkel cea das Stükk ced weg, und legt es zu dem spitzen Winkel, so hat man würklich beide in 2 rechte verwandelt.

§. 141. Betrag der Winkel über einem Strich und um einen Punkt. (Folgerung.) Alle Winkel über einem Strich betragen zusammen 2 rechte oder 180 Grad; und alle Winkel um einen Punkt betragen 4 rechte oder 360 Grad.

§. 142. Winkel unter 2 und 4 rechten. (Folgerung.) Die äußern Schenkel der Winkel, die zusammen nicht 2 rechte betragen, können keinen einzigen Strich bilden, und Winkel, die zusammen nicht 4 rechte betragen, können nicht allen Winkelraum um einen Punkt ausfüllen.

§. 143. Gleichheit der Scheitelwinkel. (Lehrsatz.) Die Scheitelwinkel sind gleich groß. Zeich. 39 ist a = d und b = c. Der Beweis ist leicht:*)

$$\angle\, a + c = 180 \text{ Gr.}$$
$$\angle\, d + c = 180 \text{ Gr.}$$
$$\angle\, a + c = \angle\, d + c$$
$$\angle\, c \quad = \angle\, c$$
$$\overline{\angle\, a \quad = \angle\, d.}$$

*) < bedeutet Winkel, und = ist das Zeichen der Gleichheit.

IV. Winkel an durchschnittenen gleichlaufenden Strichen.

§. 144. Ein Strich, der zwei gleichlaufende durchschneidet. (Anschauung.) Durchschneidet man (Zeich. 73) ein Paar gleichlaufende Striche (ab und cd) in irgend einer Richtung (hier in ef), so werden, wenn man das eine Stükk umkehrt, sich alle an beiden Seiten des Schnittes liegenden Winkel dekken; nämlich hier k und s, o und r, i und u, x und v. Werden aber (Zeich. 74) zwei nicht gleichlaufende Striche in irgend einer Richtung durchschnitten, so findet diese Dekkung bei der Umkehrung nicht statt.

§. 145. Winkel an einem Strich, der zwei gleichlaufende durchschneidet. (Erklärung.) Man hat bei der Durchschneidung zweier gleichlaufenden Striche durch einen dritten mehrere Winkelarten, nämlich:

a) Nebenwinkel, die zusammen (nach §. 140) 2 rechte sind und sich dekken; hier (Zeich. 73) sv, ou, ir, xk, so, vu, ix, rk.

b) Scheitelwinkel, die, nach §. 143, sich dekken; hier su, vo, ik, rx.

c) Innere Wechselwinkel; hier or, ui, die, nach §. 144, sich gleich sind oder sich dekken.

d) Aeußere Wechselwinkel; hier sk, vx, die, nach §. 144, sich ebenfalls gleich sind oder dekken.

e) Innere und äußere Wechselwinkel; hier sr, vi, ok, ux.

f) Innere Gegenwinkel; hier ur, oi.

g) Aeußere Gegenwinkel; hier vk, sx.

h) Innere und äußere Gegenwinkel; hier ku, rv, si, ox.

§. 146. Wechselwinkel gleich, Gegenwinkel 180 Grad. (Ableitung.) Aus der §. 144 angeschauten Dekkung der Winkel bei durchschnittenen gleich-

laufenden Linien, nach Umkehrung der Stükke, ergiebt sich, daſs or und ui, also die innern Wechselwinkel, und sk und vx, also die äußern Wechselwinkel, sich gleich sind. Weil dies der Fall ist, so müssen die innern Gegenwinkel (ur, oi) sowohl als die äußern (vk, sx) 2 rechte Winkel oder 180 Grad betragen; denn Nebenwinkel betragen 2 rechte, und statt eines Nebenwinkels kann man den dekkenden Wechselwinkel setzen; z. B.

$$\begin{aligned} i\,r &= 180 \text{ Gr.} \\ i &= u \\ \hline r\,u &= 180 \text{ Gr.} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} s\,v &= 180 \text{ Gr.} \\ v &= x \\ \hline s\,x &= 180 \text{ Gr.} \end{aligned}$$

Aus diesem erhellet noch, 1) daſs die innern und äußern Wechselwinkel auch 180 Grad betragen; z. B. sr muſs 180 Grad sein; denn ru (innere Gegenwinkel) sind gleich 180 Gr.; statt u kann man den Scheitelwinkel s setzen; 2) daſs die innern und äußern Gegenwinkel sich gleich sind; z. B. $v = r$; denn:

$$\begin{aligned} v\,u &= 2r \\ r\,u &= 2r \\ \hline v\,u &= r\,u, \end{aligned}$$

also auch v ohne u = r ohne u.

§. 147. Gleichlauf, bedingt durch Winkel am Durchschnitt. (Ableitung.) Wie die Richtung der Schenkel den Betrag der Winkel bestimmt (§. 144 und 146), so ist auch umgekehrt von dem Betrage der Winkel die Richtung der Schenkel abhängig. Darum müssen zwei grade Striche, die von einem dritten durch-

schnitten sind, unter folgenden einzelnen Bedingungen gleichlaufend sein:

a) wenn die innern Wechselwinkel gleich sind,
b) wenn die äußern Wechselwinkel gleich sind,
c) wenn die innern und äußern Gegenwinkel gleich sind,
d) wenn die innern Gegenwinkel 180 Gr. betragen,
e) wenn die äußern Gegenwinkel 180 Gr. betragen,
f) wenn die innern und äußern Wechselwinkel 180 Gr. betragen.*)

§. 148. **Ungleichlaufende durchschnittene Striche.** (Folgerung.) Sind (Zeich. 74) 2 ungleichlaufende Striche von einem andern durchschnitten, so müssen die innern Gegenwinkel auf der einen Seite des Durchschnittes unter 2 rechte, und auf der andern über 2 rechte betragen, die Striche selbst nach jener Seite sich zu-, nach dieser sich abneigen. Je weiter die Winkel von

---

*) Anmerkung. Mehrere Mathematiker pflegen die vorliegenden Sätze noch besonders zu beweisen. Die fünf letzten Beweise werden auf den ersten zurückgeführt. Der erste Beweis ist ein sogenannter Beweis aus dem Gegentheil (e contrario) und daher mehr eine Verdeutlichung, als ein Beweis. Ich halte ihn nicht für nothwendig, indem hier die Anschauung die Wahrheit aufdringt. Da er aber häufig gegeben wird, so will ich ihn hierher setzen:

Nimmt man (Zeich. 74) an, g h sei nicht gleichlaufend mit c d, obgleich die innern Wechselwinkel v r gleich sind oder sich dekken; so muſs man doch zugeben, daß irgend ein andrer Strich gleichlaufend mit c d durch den Durchschnittspunkt von e f und g h gezogen werden könnte. Wir ziehen ein Mal solchen Strich, z. B. hier a b. Wäre dieser nun würklich gleichlaufend mit c d, so müſsten nach §. 145 die Winkel r und x zusammen den Winkel v dekken. Da aber nun vorausgesetzt ist, v dekkt r; so ergab sich daraus, das r x dekkte r, oder dafs r x so groß wäre als r. Dies ist nicht möglich. — Wohin man aber auch die Linie a b legte, stets würden sich dieselben Widersprüche vorfinden. Es müssen also g h und c d gleichlaufend sein, wenn die innern Wechselwinkel v r sich dekken.

einander abweichen, desto stärker ist die Zuneigung und Abneigung.

§. 149. Gleichlauf bei rechten Winkeln am Durchschnitt. (Folgesatz.) Stehen 2 Striche auf einem dritten winkelrecht, so müssen sie unter einander gleichlaufend sein; denn ihre innern Gegenwinkel betragen ja 180 Grad.

§. 150. Die Winkel in spätigen (Parallel=) Vierekken. (Folgerung.)

1) Bei spätigen (Parallel=) Vierekken werden ein Paar gleichlaufende Striche von einem zweiten Paar durchschnitten. Darum müssen je 2 an einem Striche liegende Winkel als innere Gegenwinkel zusammen 2 rechte ausmachen.

2) In einem spätigen Viereck müssen die entgegengesetzten Winkel gleich groß sein: z. B. (Zeich. 80) muss i und o gleich sein; denn:

o = r als innere Wechselwinkel,
r = i als innere und äußere Gegenwinkel,

o = i.

3) Ist in einem spätigen Vierekke ein rechter Winkel, so müssen alle recht sein, wie aus 1 und 2 erhellet.

4) In jedem spätigen Vierekke beträgt die Summe der Winkel 4r oder 360 Grad, wie aus 1 und 2 erhellet.

§. 151. Bildung gleichlaufender Striche. (Aufgabe.) Will man von einem Punkt aus einen Strich mit einem gegebenen gleichlaufend ziehen, so kann man Folgendes thun:

a) Man bildet innere Wechselwinkel; z. B. es soll (Zeich. 81) von dem Punkt c aus ein Strich gleichlaufend mit a b gemacht werden, so zieht man von c aus einen beliebigen Strich auf a b, hier c o, den Winkel i trägt man rechts an c, so dass man k gleich macht i, oder den Winkel u links an c, so dass man r gleich macht u.

b) Man bildet innere Gegenwinkel von 180 Grad;
c) oder man verfährt noch anders, nach den §. 147 angegebenen Weisen.

Auf dem Felde hat man beim Grabenziehen, Baumpflanzen u. s. w. oft nöthig, gleichlaufende Richtungen zu bilden.

§. 152. **Winkel-Gleichheit bei Schenkel-Gleichlauf.** (Lehrsatz.) Haben in zwei Winkeln je 2 Schenkel einerlei Richtung, so müssen beide Winkel sich dekken.

Es sollen (Zeich. 123) in den Winkeln **c o d** und **e u f** der Schenkel **c o** zu **a b** sich richten, wie **e u**, und **d o** wie **f u**, so müssen beide Winkel gleich sein.

Der Beweis ist folgender:

Weil **c o** zu **a b** sich richtet, wie **e u**, so ist*) **co** ‡‡ **e u**, und darum $< x = < s$.

Aus demselben Grunde ist

d o ‡‡ **f u**, und darum $< v = < r$

$< x + < v = < s + < r$

$< x + n + v = < s + m + r$, denn beide betragen 180 Gr.

$< n = < m$; denn wenn Gleiches von Gleichem weggethan wird, so bleibt Gleiches.

§. 153. **Folgerungen aus dem vorigen §.**

1) In einander liegende Winkel, deren Schenkel gleichlaufend sind, müssen sich dekken, und in einander liegende Dreiekke (Zeich. 124), deren Seiten gleichlaufen, müssen gleiche Winkel in derselben Richtung haben. Die Linie **a o** verdeutlicht dies.

2) Kann man einen Winkel nicht messen, weil es vielleicht unmöglich ist, in seinen Winkelpunkt zu kom-

---

*) ‡‡ ist das Zeichen des Gleichlaufens.

men; so braucht man nur einen Winkel zu errichten, dessen Schenkel mit den Schenkeln des zu messenden gleichlaufen, und den messen. Soll z. B. (Zeich. 123) c o d gemessen werden, und ist in o eine Schwierigkeit, so kann man e u f messen.

V. Das Richtwägen.

§. 154. **Bleiloth und Grundwage für senkrechte und wagerechte Richtungen.** (Erklärung.) Nicht minder wichtig, als das Messen der einfachen Ausdehnungen und Winkel, und als das Bilden von gleichlaufenden Strichen, ist das Aufsuchen von wagerechten und lothrechten Richtungen. Die lothrechten findet man durch ein Bleiloth leicht. Weiß man z. B. nicht, ob eine Mauer lothrecht steht, so nimmt man einen Faden, knüpft daran einen schweren Körper, und bildet so einen Seiger (Pendel). Hängt der Seiger still, so ist der Faden lothrecht, steht er nun oben an der Mauer an und unten ab, so muſs die Mauer sich überneigen. Durch dasselbe Bleiloth kann man auch erfahren, ob irgend ein Strich auf einer ruhenden Fläche wagerecht ist. Befestigt man nämlich (Zeich. 170) das Holz m n winkelrecht an das Holz r v, dessen untere Kante sehr genau gearbeitet sein muſs, knüpft man bei m einen Faden an und daran die Bleikugel o, so muſs diese mit dem Faden, wenn r v auf einer wagerechten Fläche steht, genau in der Mitte von m n liegen. Ist diese Mitte durch einen Strich bezeichnet, so muſs der Faden diesen Strich bedekken. Sezt man aber dies Werkzeug auf eine schräge Fläche, so wird das Bleiloth neben den Strich fallen. Die Steinsetzer, Maurer und Zimmerleute bedienen sich dieses Werkzeuges, das sie Grundwage nennen, und das in sehr verschiedenen Formen vorkommt, z. B. auch so, wie Zeich. 171 angibt. Weil bei dieser letzten Grundwage der Bogen a b

in Grade getheilt werden kann, wovon der mittelste o ist und die beiden nächsten 1, so kann man durch diese Grundwage genau erfahren, um wie viel Grad ein Strich auf einer Ebene von der wagerechten Richtung abweicht.

§. 155. Das Richtwägen durch die Wasserwage. (Erklärung.) Die Grundwage kann nur für die Wagerichtigkeit von kurzen Ausdehnungen gebraucht werden, deren sichere Verlängerung manchen Schwierigkeiten unterworfen ist. Will man weite Strekken richtwägen (nivelliren), z. B. ein Akkerfeld, eine Wiese u. s. w., was häufig vorkommt, (weil man die Abzugs- und Speise-Gräben nur gut führen kann, wenn man gehörig die Richtung, in der sie kommen sollen, gerichtwäget hat); so bedient man sich der Wasserwage. Diese besteht aus einer gläsernen oder blechernen Röhre, an deren Ende winkelrecht 2 gläserne Röhren angebracht sind (siehe Zeich. 172). Gießt man in dieses Geröhre Wasser, so wird es in beiden Enden desselben gleich hoch steigen, und der Strich a b, der durch die Oberfläche des Wassers in beiden Röhren geht, muss wagerecht sein. Will man durch diese Wasserwage erfahren, um wie viel Fuß das eine Ende eines Feldes niedriger liegt als das andere, so befestigt man sie, wie den Feldwinkelmesser, auf einem Gestelle, setzt sie an das eine Ende des Feldes (Zeich. 173 bei r) und stekkt an das andere den Stab b q ein. Von o aus äugelt man durch die beiden wagerechten Wasseroberflächen nach dem Stab 96 hin, wo einer steht und irgend ein sichtbares Zeichen hält, z. B. eine weiße Pappscheibe mit einem schwarzen Kreuz. Diese Scheibe, oder was es sonst ist, bewegt er auf die Rufworte des Aeugelnden so lange auf und ab, bis jener ihr n Mittelpunkt mit den 2 Wasserflächen in einer Richtung sieht, was hier im Punkt n der Fall ist. Misst man darauf die Höhe von

n b und die von o r, so ergibt sich daraus, um wie viel b tiefer liegt als r. Dieses ist hier durch b m angegeben. Sollte, wie das bei Anlegung von Wegen oft der Fall ist, die Richtung r m völlig wagerecht werden, so müsste man entweder r p b ausgraben, oder r b m ausfüllen, oder die Hälfte vom ersten ausgraben und damit die Hälfte vom letzten ausfüllen. Ist das Feld, welches gerichtwäget werden soll, so lang, dass man nicht vom Anfang bis zu Ende äugeln kann, so stekkt man sich Mittelstellungen ab, äugelt vom Anfang zur ersten Mittelstellung, von da zur zweiten u. s. w.

§. 156. Andere Werkzeuge zum Richtwägen. (Erklärung.) Will man die Wasserwage noch vollkommner machen, als das hier der Fall ist, so kann man an das Ende der beiden Röhren solche, aber bewegliche, Absehen (Dioptern) anbringen, als man an dem Feldwinkelmesser hat; oder auch Körperchen auf dem Wasser schwimmen haben, die das Aeugeln befördern. Man kann auch die Wasserwage so einrichten, dass sie jedes Mal selbst andeutet, ob ihre untere Röhre genau wagerecht liegt, nämlich man legt sie auf einer Fläche, deren Wagerichtigkeit durchaus ermittelt ist, und macht darauf Zeichen bei den Wasserständen in den beiden Röhren. Will man ohne Mittelstellungen eine lange Richtung abwägen, so kann man sich eines Fernrohres bedienen, an dessen äußerm Glase 2 Kreuzfäden als Absehen sich befinden. Vermittelst der Grundwage stellt man das Fernrohr genau wagerecht, und verfährt dann so, als es im vorigen §. angegeben ist. Auch mit einem gewöhnlichen Aeugel-Richtscheit, das auf einem wagerecht gestellten Meßtischchen ruht, oder mit einem wagerecht gestellten Feldwinkelmesser (wenn nur bei beiden die Absehen ein Haarkreuz haben), kann man richtwägen. Ja, es ist möglich, ohne alle künstliche Werkzeuge zu richtwägen. Man sucht sich eine Wasserfläche, stellt an 2 Sei-

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

ten derselben senkrechte Stäbe, die genau gleichhoch über dem Wasser hervorragen und mit Knöpfchen versehen sind. Ueber diese wagerecht liegenden Knöpfchen äugelt man zu den Punkten hin, deren Höhen=Abstand von der gewählten Stellung man wissen will. Hat man kein Wasser, so muss man sich anderweitig, z. B. durch die Grundwage oder durch Wassergießen, zwei wagerecht liegende Punkte in der Augenhöhe zu verschaffen suchen.

Anweisung. So wenig bei dem Anfang dieser Uebung aufzufassen ist, so viel ist dabei zu thun. Sie fängt damit an, dass der Lehrer lässt angeben, welche von 2 Strichen auf der Tafel, und von sonst vorkommenden der längste und welcher der kürzeste, wie viel der eine länger, der andere kürzer sei. Darauf folgt die Bestimmung der Längen, nach Fingern, Händen, Spannen, Füßen, Schritten. An Tafeln, Tischen, Bänken, Wänden, Fußböden, an mitgebrachten Schnüren u. s. w. werden diese Messungen vorgenommen, und die Schüler dabei angehalten, beim Messen stets beide Längen grade zu halten, so dass alle Beugungen, Krümmungen und Winkel vermieden werden. Erst nach diesen Uebungen nimmt man das Landesmaaß, was, wie schon oben erinnert wurde, sich auf dem Richtscheit zugleich befindet; im Fall der Noth auch auf den Tafelrändern angebracht, oder in einen jeden Stokk eingeschnitten werden kann. Man läßt nach Strichen, Zollen, Fußen, Ruthen, Ellen größere und kleinere Richtungen messen, und auch Tafelzeichnungen nach solchen Maaßen machen; z. B. zeichnet einen rechten Winkel, dessen einer Schenkel 4 und dessen anderer 3 Zoll lang ist; ein Rechtekk, dessen eine Seite 5 und dessen andere 3 Zoll beträgt; ein ungleichseitiges Dreiekk, dessen Seiten 3, 4, 5 Zoll betragen; einen Kreis, dessen Halbmesser einen Zoll macht u. s. w. Als eine Nebenübung erwähne ich hier das Abschätzen. Es ergötzt die Kinder, etwas zu rathen; und ein Rathen, was sich auf Abschätzung gründet, hat seinen Werth. Darum thut der Lehrer wohl, wenn er vor jeder Messung eine Abschätzung vorhergehen lässt; die Schüler werden sich freuen, deren Abschätzung dem würklichen Maaße am nächsten kommt. Außer diesem Abschätzen kann man noch besondere Augenmaaßübungen vornehmen, nämlich man lässt die Schüler, ohne den Maaßstab, ver=

schiedene Längen in bloßen Strichen, oder in Flächen vereint, zeichnen; z. B. zeichnet Striche hinter einander von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 u. s. w. Zoll, oder theilt einen langen Strich in Zolle und Maaßstriche, oder macht ein Rechtekk, dessen Striche 4 und $2\frac{1}{2}$ Zoll betragen, u. s. w. Wichtiger ist es, die Schüler anzuhalten, dass sie ihre gewöhnlichen Wege ausschreiten; z. B. den Weg vom Hause zur Schule, und dass sie untersuchen, welcher Weg ihnen der nächste ist. Ueberhaupt muss man in ihnen den Sinn anregen, überall in ihren Umgebungen das Maaß zu gebrauchen. Dies wird auch sicher geschehen, wenn man in Verfolg des Unterrichts aufs Feld geht und da Richtungen (nach §. 119) abstekken und messen lässt. Im Fall der Noth dient jeder grade Stab, der etwas spitz am Ende ist, zum Abstekken, und hat man solchen auch nicht, so bedient man sich der Schüler selbst als Maaßstäbe. Es schadet ihnen nichts, wenn sie auch ein Mal eine Viertelstunde wie eingewurzelt stehen müssen.

Zur Winkelmessung verfertigt sich jeder Schüler von Pappe einen Winkelmesser (Transporteur, Gradbogen, Theilscheibe), nämlich der Umkreis eines Halbkreises wird, vermittelst des Zirkels in 180 gleiche Theile getheilt. Das Verfertigen eines solchen Winkelmessers ist an sich schon eine recht gute Uebung; und da der Winkelmesser nicht fürs würkliche Leben gemacht ist, so kommt es nicht darauf an, dass er auf das Genaueste gearbeitet sei; doch werden fleißige Schüler keine schlechten Winkelmesser machen. (Die Andeutung eines Winkelmessers, der aber nicht vollständig ausgeführt ist, s. Zeich. 61.) Haben die Schüler ihre Winkelmesser fertig, so müssen sie auf der Tafel Winkel von allerlei Graden machen; z. B. eine Raute, worin der stumpfe Winkel 110 Grad und der spitze 70 Grad ist; eine Schrägraute, worin die Winkel 120 Grad und 60 Grad betragen. Es werden die Winkel der regelmäßigen Fünf-, Sechs- und Achtekke, die immer dieselben sind, gemessen, und die Winkel in allen 7 Arten von Dreiekken untersucht. Man kann hierzu die Flächen erst zeichnen lassen, oder die vorhandenen Grundflächen und Grundkörper dazu gebrauchen. Die Abschätzung der Winkel nach Graden vor ihrer Messung ist nicht zu versäumen. Das Winkelzeichnen nach gewissen Graden,

ohne Gebrauch des Winkelmessers, ist sehr schwer, und gehört mehr in den Zeichenunterricht, als hierher.

Einen ordentlichen Feld-Winkelmesser wird nicht Jeder haben, der sich dieses Buches bedient; aber eine Zollmann'sche Scheibe oder ein Meßtischchen kann sich einer eher anschaffen, und so vermittelst eines hölzernen Richtscheites, das zum Aeugeln eingerichtet ist, richtwägen und Winkel messen. Diese Richtwägungen und Winkelmessungen auf dem Felde dürfen durchaus nicht vernachlässiget werden. Sollte ein Lehrer (was sich wohl nicht befürchten lässt) auch kein Meßtischchen mit Aeugel-Richtscheiten sich machen lassen können, so muss er jede Feld-Winkelmessung vermittelst eines Dreiekkes ausführen. Es sei z. B. (Zeich. 105) der Winkel **A B C** auf dem Felde zu messen. Man macht sich auf den Schenkeln beliebige Punkte, hier **A** und **C**, und misst darauf **A B**, **B C** und **C A**. Betrüge **A B** 8 Fuß, **B C** 8 Fuß und **A C** 5 Fuß, so macht man auf dem Papier ein Dreiekk, dessen 3 Seiten einzeln 8 Strich, 8 Strich und 5 Strich betragen; der Winkel, der den 5 Strichen gegenüber steht, hier **a b c**, muss so groß sein, als **A B C**, und kann auf dem Papier leicht mit dem Papier-Winkelmesser ausgemessen werden. — So also ist es möglich, ohne alle Feldwinkelmesser dennoch Winkel auf dem Felde zu messen, indem man die Feldwinkel im Kleinen auf das Papier trägt.

Die Sätze, welche in dieser Uebung vorkommen, sind von den Schülern alle aufzufinden, indem man ihnen hier und da Hülfen gibt. Recht gründlich ist das Winkelverhältniss bei den durchschnittenen gleichlaufenden Strichen zu behandeln.

Zweite Uebung.

Das Messen und Vergleichen von Flächen.

I. Das eigentliche Messen der Flächen.

§. 157. Flächenmessen und Flächenmaaße. (Erklärung.) Wie man einen Strich ausmisst, indem

man ihn mit einem andern (kleinern — bekannten) vergleicht, und untersucht, wie oft dieser in jenem enthalten sei (§. 112); so kann man auch eine Fläche messen, indem man untersucht, wie viel Mal eine andere (bekannte — kleinere) Fläche in ihr enthalten ist. Man misst also Flächen mit Flächen; führt aber dies mit Linien aus, indem man Länge und Breite, z. B. bei Tuch, Leinwand u. s. w; und zwar stets winkelrecht zu einander misst, und die Beträge mit einander vervielfältigt. Quer über und um die Fläche herum darf nimmer gemessen werden, wenn man den Flächenraum haben will. In dem Geviert (Quadrat) besitzt man ein natürliches allgemein gültiges Maaß für alle Flächen. Man bedient sich der Geviertruthen (bezeichnet □°) Geviertfuße (□′) Geviertzolle (□″) Geviertstriche (□‴). Sehr große Flächen werden nach Geviert- (Quadrat-) Meilen bestimmt. Wie man einen Längenfuß in 12 und in 10 Zolle eintheilt, so wird auch ein Geviertfuß zu $12 \times 12 = 144$ oder zu $10 \times 10 = 100$ □Zollen berechnet, und auf gleiche Weise geschieht es auch mit den □Ruthen, und □Zollen.

§. 158. Messung des Gevierts. (Erklärung.) Da das Geviert bei Flächen das allgemein angenommene Maaß ist, so lässt sich ein größeres Geviert mit einem kleinern leicht messen. Man braucht nur, wegen der Gleichheit von Länge und Breite bei einem Geviert, zu sehen, wie oft eine Seite des kleinern Gevierts in einer Seite des größern Gevierts enthalten ist, und den Betrag mit sich selbst zu vervielfältigen. So kann man z. B. einen □Fuß mit einem □Zoll (nach 12theiligem Maaße) ausmessen, indem man 12 Mal eine Seite des letztern an eine Seite des erstern legt, und dann 12 mit 12 vervielfältigt. Denn wollte man eine Seite an der gemessenen noch messen, so würde man wieder 12 Zoll erhalten, und macht man beim Messen Theilungspunkte,

so ließe sich darnach leicht sichtlich ein □ Fuß in 144 einzelne □ Zolle zerlegen.

§. 159. Messung des Rechtekkes. (Erklärung.) Beim Rechtekk sind Länge und Breite nicht gleich, darum muss man alle beide messen, was leicht ist, da beide rechtwinklig auf einander stehen. Will man von einem Rechtekk den Geviert=Inhalt wissen, so braucht man nur Länge und Breite, wie beim Geviert, mit einander zu vervielfältigen. Ist z. B. die Länge 8 Zoll und die Breite 5 Zoll, so muss das Rechtekk 40 □″ enthalten.

§. 160. Messung der Schrägrauten und Rauten. (Erklärung.) Schwerer ist die Ausmessung einer Raute und einer Schrägraute, weil darin die Seiten nicht in rechten Winkeln zu einander stehen. Um aber doch rechte Winkel zu bekommen, schneidet man auf dem einen Ende ein Stükk ab, und setzt es auf das andere an; z. B. Zeich. 62 haben wir die Schrägraute cbad. Diese verwandeln wir uns in das Rechtekk fced, und zwar dadurch, dass wir auf den Punkt d den Strich ed winkelrecht setzen, und nach diesem Strich das Stükk (Dreiekk) ead abschneiden. Das abgeschnittene Stükk setzen wir in derselben Lage an das andere Ende an, so dass a auf b, e auf f, d auf c fällt, und statt einer Schrägraute haben wir ein Rechtekk von derselben Größe. Bei diesem Rechtekk messen wir die Seiten cd und ed, vervielfältigen (multipliciren) den Betrag mit einander, und haben denn nicht bloß den Geviert=Inhalt von dem Rechtekk fced, sondern zugleich den von der Schrägraute bcad. Mit der Raute macht man es eben so. Allein man hat auch gar nicht erst nöthig, die Verwandlung in ein Rechtekk vorzunehmen, sondern man braucht bei einer Raute und Schrägraute nur eine beliebige Seite zu messen, auf diese eine von der gleichlaufenden aus winkelrecht zu setzen, diese auch zu messen, und den Betrag beider in einander zu verviel=

fältigen. In der Raute a b d c (Zeich. 63) misst man e d,) und das winkelrecht darauf errichtete e d, und vervielfältigt den Betrag beider mit einander. Man pflegt bei den zu messenden Flächen die Seite, welche man zuerst misst, den **Grund** zu nennen, und die rechtwinklig darauf errichtete, oder stehende, die **Höhe**; z. B. Zeich. 63 ist c d der Grund, und e d die Höhe.*)

§. 161. **Messung von rechtwinkligen Dreiekken.** (Erklärung.) Ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreiekk ist genau die Hälfte von einem Geviert, mit dem es in den beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, und wovon eine als wagerecht und die andere senkrecht gedacht wird, gleichen Grund und gleiche Höhe hat, und ein rechtwinkliges ungleichschenkliges die Hälfte von einem Rechtekk, mit dem es auf dieselbe Weise gleichen Grund und gleiche Höhe hat. So ist z. B. (Zeich. 64) das Dreiekk c d b die Hälfte von dem Geviert c d a b, denn beide haben den gemeinsamen Grund d b und die gemeinsame Höhe c d. Eben so ist (Zeich. 65) a d b die Hälfte von d c a b, denn beide haben den Grund a b und die Höhe d a. Rechtwinklig gleichschenklige und ungleichschenklige Dreiekke sind deshalb leicht auszumessen. Man braucht nur die zwei rechtwinklig zu einander stehenden Seiten als Grund und Höhen zu messen, den Betrag zu vervielfältigen und von dem Ergebniss die Hälfte zu nehmen. Beträgt z. B. in dem Dreiekk (Zeich. 20, a) der Grund 4 Zoll und die Höhe 8 Zoll, so muss der Geviert-Inhalt 4 × 8 : 2, d. h. 16 Geviertzoll betragen. Statt die ganze Höhe und den ganzen Grund zu nehmen, und das Ergebniss durch 2 zu theilen, kann man auch gleich den halben Grund mit der ganzen Höhe (z. B. hier 2 mit 8) ver-

*) Die Namen **Grund** und **Höhe** kommen daher, weil die Flächen beim Messen als auf einer Seite stehend gedacht werden.

vielfältigen, oder die halbe Höhe mit dem ganzen Grunde (z. B. hier 4 mit 4) und man erhält dasselbe.

§. 162. Ausmessung der übrigen Dreiekke. (Erklärung.) Jedes Dreiekk ist die Hälfte von einem spätigen (Parallel)-Viereкk, mit dem es gleichen Grund und gleiche Höhe hat, wie man das aus der Zusammensetzung von 2 gleichen gleichartigen Dreiekken, oder aus der Durchgeerung spätiger Vierekke hinlänglich sehen kann. Darum wird jedes Dreiekk ausgemessen durch Messung von Grund und Höhe und Theilung des Ergebnisses durch 2. Bei allen nicht rechtwinkligen Dreiekken muss man sich, wie bei den Rauten und Schrägrauten, die Höhe erst verschaffen; und dies geschieht, indem man auf den Grund von dem entgegengesetzten Winkel sich einen rechtwinklig auf jenem stehenden Strich errichtet. So hat man (Zeich. 66) das Dreiekk c b a auszumessen, indem man den Grund c a misst, sich darauf von b aus den rechtwinkligen Strich b d errichtet, diesen misst und von dem Ergebniss die Hälfte nimmt. Bisweilen ist die Errichtung des rechtwinkligen Höhenstriches bei Rauten, Schrägrauten und nichtrechtwinkligen Dreiekken mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Sollte z. B. (Zeich. 19, c) das Dreiekk r m b ausgemessen werden, und hätte man m b als Grund gemessen, so müsste man erst m b nach m hin verlängern, um von r aus darauf rechtwinklig die Höhe errichten zu können.

§. 163. Ausmessung der unregelmäßigen Vierekke und Vielekke. (Erklärung.) Alle unregelmäßigen Vierekke lassen sich in Dreiekke zerlegen durch Geeren. Will man sie ausmessen, so thut man dies, misst jedes einzelne Dreiekk aus, und nimmt hernach den Gesammtbetrag. Auf eine selbe Weise macht man es mit allen unregelmäßigen Vielekken, welche durch grade Striche begränzt sind. Z. B. (Zeich. 67) ist das

unregelmäßige Vielekk in 8 verschiedene Dreiekke zerlegt, wovon jedes für sich zu messen und zu berechnen wäre.

§. 164. Messung der regelmäßigen Vielekke. (Erklärung.) Die regelmäßigen Vielekke, d. h. solche, deren Ekken alle in einen Umkreis fallen, und die also einen Mittelpunkt in sich haben, lassen sich in so viele gleiche Dreiekke theilen, als sie Seiten haben (man sehe Zeich. 56 und 58). Bei jedem dieser Dreiekke müsste man die Seiten des Vielekkes messen, auf diese vom Mittelpunkte aus einen senkrechten Strich errichten, diesen messen, und davon die Hälfte nehmen. Da aber alle Dreiekke in einem regelmäßigen Vielekk sich dekken, so braucht man nur eines zu messen und zu berechnen, und das Ergebniss so oft zu nehmen, als das regelmäßige Vielekk Seiten hat, um den □Inhalt des Vielekkes heraus zu bekommen. Als Beispiel diene Zeichnung 68! Man misst a b, dies soll 5 Zoll betragen, darauf misst man den rechtwinklig errichteten Strich o c; dieser beträgt 4 Zoll, mithin das Dreiekk $5 \times 4 : 2$, d. i. 10 □Zoll. Diese 6 Mal genommen, gibt 60 □Zoll. Leichter kommt man dazu, wenn man den Betrag aller Umseiten mit der halben Höhe eines Dreiekkes vervielfältiget, z. B. hier $5 \times 6 \times 2$; d. i. 30×2 oder 60 □Zoll.

§. 165. Messung des Kreises. (Erklärung.) Je mehrere Ekken ein regelmäßiges oder kreisiges Vielekk hat, desto mehr nähert es sich dem Kreise. Ein von uns auf einem Papierbogen gezeichnetes regelmäßiges Vierhunderteкk würde wenig vom wahren Kreis mehr abweichen. Darum sieht man bei der Ausmessung den Kreis als ein unendliches Vielekk an, und vervielfältigt den Umkreis mit der Hälfte der Höhe oder des Strahles (¼ des Durchmessers) um so den □Inhalt des Kreises, als eines unendlichen Vielekkes, zu erhalten. Der Umkreis selbst lässt sich aber als etwas Gebogenes nicht gut

mit unsern graden Maaßen messen. Diesem Uebelstande haben aber gelehrte Meßkünstler abgeholfen, indem sie durch scharfe Berechnungen und Messungen herausgebracht, daß in jedem Kreis der Umkreis etwas über 3 Mal länger ist, als der Durchmesser. Der Meßkünstler Archimedes rechnete aus, daß sich der Durchmesser zum Umkreis verhielte, wie 7 zu 22, und Ludolf von Köln stellte dies Verhältniß noch richtiger auf in den Zahlen 100 zu 314.*)

Will man drum den Umkreis wissen, so braucht man nur den Durchmesser zu messen und aus dem Betrag den Umkreis zu errechnen. Als Beispiel zur vollständigen Messung und Berechnung der Kreise diene Zeich. 69! Man misst zuerst den Durchmesser ab. Dieser beträgt 8 Zoll. Aus diesen 8 Zollen errechnet man auf folgende Art den Umkreis:

$$100 : 314 = 8 : x$$

```
           8
100 | 2512 | 25 3/25
    | 200  |
    -------
      512
      500
    -------
        4
 12/100 | 3/25
```

Der Umkreis beträgt also $25\frac{3}{25}$ Zoll. Dieser Umkreis wird vervielfältigt mit $\frac{1}{2}$ des Strahles oder $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, d. h. hier mit 2; also beträgt der Geviert-Inhalt des Kreises $2 \times 25\frac{3}{25} = 50\frac{6}{25}$ Geviert-Zoll.

§. 166. Messung eines Kreisausschnittes und eines Kreisabschnittes. (Erklärung.) Will man einen Kreisausschnitt messen, z. B. den Kreisausschnitt d c b (Zeich. 69), so misst man zuerst den Durchmesser und errechnet daraus den ganzen Umkreis.

*) Metius, ein Niederländer, stellte das Verhältniß 113 : 355 auf; das richtigste in kleinen Zahlen, aber nicht das bequemste.

Beträgt der Durchmesser 8 Zoll, so muss, wie oben sich ergab, der Umkreis $25\frac{3}{25}$ sein. Darauf misst man mit einem Winkelmesser den Winkel d c b, dieser soll 60 Grad betragen. Um nun zu ersehen, wie viel diese 60 Grad würkliche Länge ausmachen, schließt man so:

$$\frac{360}{36} : 25\tfrac{3}{25} = \frac{60}{6} : x$$

$$6 \cdot 25\tfrac{3}{25} = 150\tfrac{18}{25}$$

$$36 \,\big|\, 150\tfrac{18}{25} \,\big|\, 4\tfrac{1}{50} + \tfrac{1}{6} = 4\tfrac{14}{75}$$

$$144$$

$$\tfrac{6}{36} \,\big|\, \tfrac{1}{6}$$

Der Bogen b d beträgt also $4\frac{14}{75}$ Zoll, mithin der Ausschnitt $2 \times 4\frac{14}{75}$, also $8\frac{28}{75}$ Zoll. Wollte man den Kreisabschnitt a n d berechnen, so müsste man zuerst den Ausschnitt a n c d messen und berechnen, darauf das Dreiekk a c d, letzteres vom erstern abziehen, und würde in dem Rest den Geviert-Inhalt des Kreis-Abschnittes haben.*)

II. Dekkung der Dreiekke.

§. 167. Gleichheit, Aehnlichkeit, Dekkung. (Erklärung.) Zwei Flächen, die nach richtiger Ausmessung einen gleichen Geviert-Inhalt haben, wenn auch ihre Form von einander abweicht, nennt man gleich (=). Ein Dreiekk ist einem Rechtekk gleich, wenn des Dreiekkes Grund 8, und des Dreiekkes Höhe 16 Zoll beträgt, während der Grund des Rechtekkes 2,

---

*) Der Lehrer, welcher nicht zu eilen braucht, lasse alle von §. 67—§. 91 vorkommenden Flächen ausmessen, und eine Verhältnisstafel von den eingeschriebenen zu den umschriebenen Flächen machen! Das ist eine weitläuftige und heilsame Uebung, die auch den Schülern als häusliche Arbeit aufgegeben werden kann. Das Verhältniss der eingeschriebenen Flächen zu den umschriebenen ergibt sich aus der Messung beider, und muss nothwendig ein stehendes sein. Manches Verhältniss wird durch den folgenden Unterricht auch noch deutlicher, und der Lehrer kann darum auch diese Aufgaben bis zum Schluss dieser ganzen Uebung verschieben.

und seine Höhe 32 Zoll ausmacht; denn beide Flächen haben 64 □ Zoll Inhalt. Flächen, deren Größe nicht gleich ist, die aber ein gleiches Aussehen haben, nennt man ähnlich (∽). Alle Gevierte, alle Kreise und alle gleichseitige und rechtwinklig gleichschenklige Dreiekke müssen sich ähnlich sein. Unter den Körpern sind alle Vierflache, alle Würfel, alle Achtflache, alle fünfekkige Zwölfflache, alle Zwanzigflache und alle Kugeln sich ähnlich. Die Aehnlichkeit hängt ab von Formen-Uebereinstimmung, die Gleichheit aber von Größen-Uebereinstimmung. Flächen, bei denen Form und Größe übereinstimmt, sind sich gleich und ähnlich (≌); sie dekken sich, wenn man sie auf einander legt. Körper, die bei gleicher Form denselben Raum einnehmen, weichen räumlich und förmlich nicht von einander ab.

§. 168. Bedingungen der wichtigsten Flächen-Dekkungen. (Erklärungen.)

1) Alle Kreise dekken sich, die gleiche Strahlen, oder gleiche Durchmesser, oder gleiche Umkreise haben. (s. §. 131! Von Halbkreisen und Viertelkreisen gilt verhältnißmäßig dasselbe.

2) Zwei Dreiekke dekken sich, wenn in beiden die 3 Winkel einzeln und die 3 Seiten einzeln genau sich gleich sind, die erstern gleich weit, die letztern gleich lang.

3) Alle Gevierte dekken sich, die nur in Absicht einer Seite gleich groß sind, weil alle Seiten in Gevierten gleich groß und alle Winkel rechte sein müssen.

4) Alle Rechtekke dekken sich, in denen 2 nicht gleichlaufende Seiten einzeln einander gleich sind.

5) Alle regelmäßigen, d. h. kreisigen Vielekke dekken sich, wenn sie gleich viele Seiten und gleichlange Seiten, oder gleich viele Seiten und gleichlange Strahlen oder Durchmesser haben.

6) Zwei Rauten dekken sich, bei denen nur eine Seite und ein daran liegender Winkel sich dekken. Zwei Schrägrauten sind gleich und ähnlich, wenn zwei mit einander verbundene Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel in dem einen Dreiekk dieselben Stükke in dem andern dekken.

7) Verschiedenartige Dreiekke, Vierekke, Fünfekke, oder gar Vierekke und Dreiekke u. s. w. können sich nie dekken.

§. 169. Anwendung der Flächen-Dekkung. (Erklärung.) Auf die Dekkung der Dreiekke, Gevierte und Rechtekke gründet sich das Abzeichnen, vermittelst der Netze. Will man z. B. eine Landkarte, eine Zeichnung oder ein Gemälde mit Leichtigkeit abzeichnen, so gibt es 2 Wege;

a) Man hat durchsichtiges Oelpapier, was man auf das Gemälde legt, durch das man alle Striche der Unterlage sieht, so daſs man nur dieselben dekkend nachmachen kann, oder man hat das Gemälde selbst auf einem Papier, das etwas durchsichtig ist, legt darauf ein gleichfalls etwas durchsichtiges Papier, hält beide gegen das Licht, oder drükkt beide, damit man eine harte Hinterlage hat, gegen das durchsichtige Fenster, und zeichnet dekkend nach.

b) Ist die Durchzeichnung nicht möglich; so wirft man über die Zeichnung, nach Umständen mit Bleistift, Fäden u. s. w. ein Netz von Gevierten, Rechtekken oder Dreiekken, und zeichnet mit dem Bleistift auf dem Papier, das die Abzeichnung enthalten soll, ein dekkendes Netz. Weil man dadurch den großen Raum in viele kleine getheilt hat, so ist es leicht, die Abzeichnung der Zeichnung gleich und ähnlich oder dekkend zu machen.

§. 170. Dekkung der Dreiekke, bedingt durch einen Winkel mit den anliegenden

Seiten. (Lehrsatz.) Ist in einem Dreiekk ein Winkel mit seinen beiden Schenkeln, gleich einem Winkel mit seinen beiden Schenkeln in einem andern Dreiekk, so müssen auch die beiden übrigen Winkel mit der dritten Seite sich im Einzelnen dekken, und überhaupt beide Dreiekke gleich und ähnlich sein. — Es soll (Zeich. 75) der Winkel C = c, die Seite AC = ac und BC = bc sein. Nothwendig muss unter dieser Voraussetzung, wenn wir ABC auf abc legten, der Punkt B genau auf b, und der Punkt A genau auf a fallen; und da zwischen 2 Punkten nur ein grader Strich möglich ist, so könnte der Strich BA von ba nicht im Geringsten abweichen. Dasselbe gilt von den Winkeln B und b und A und a; denn wichen sie ab, so müssten auch ihre Schenkel sich mehr erweitern oder verengern, was durch ihre auf einander fallende Lage verhindert wird.

§. 171. Anwendung des vorigen §. Soll man auf dem Felde (Zeich 102) die Richtung ab messen, die über einen See oder über und durch ein anderes Hinderniss geht, so dass die würkliche Messung entweder unmöglich, oder doch umständlich und schwer ist, so wählt man sich einen Standpunkt, von wo aus man nach den beiden Endpunkten der Richtung kommen kann (hier c), misst ac und trägt es an c an, so dass ce gleich ist ac, und ae einen einzigen Strich bildet. Dasselbe geschieht mit cb, so dass cd = cb ist, und db einen graden Strich ausmacht. Die Entfernung der Punkte e und d, welche auf dem Felde durch Stäbe angedeutet sind, wird gemessen, und beträgt gerade so viel, als ab; denn

$$\angle r = \angle i \text{ (Scheitelwinkel)}$$
$$ac = ce$$
$$cb = cd$$
$$\triangle acb \cong ecd$$
$$ab = de$$

§. 172. Dekkung der Dreiekke, bedingt durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. (Lehrsatz) Dekkt in einem Dreiekk eine Seite mit ihren beiden anliegenden Winkeln in einem andern Dreiekk eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln, so müssen die übrigen Theile, und also auch die ganzen Dreiekke, sich dekken. — Es sei (Zeichn. 75) A C = a c, ∠C = ∠c und ∠A = ∠a, so müssen die Striche A B und CB sich in derselben Neigung zu einander richten, wie a b und c b, sie durchschneiden sich drum, wie man aus dem Aufeinanderlegen sehen kann, auf demselben Punkt. B fällt auf b. Daraus ergibt sich, dass BC = b c, AB = a b, und ∠B = ∠b.

§. 173. Anwendung des vorigen §.

1) Soll man auf dem Felde die Entfernung zweier Oerter messen, zu deren einem man nur in grader Richtung kommen kann, so errichtet man sich dekkende Dreiekke. Es sei z. B. (Zeichn. 106) die Entfernung von den beiden Säulen k und s, zu messen, zwischen denen sich ein Fluss befindet, der sowohl die Verbindung von k und s, als auch die von s mit einem angenommenen Standpunkt, hier mit x, verhindert, so dass man nur von x nach k, aber nicht von x nach s kommen kann. Um nun die Entfernung von k nach s zu messen, bezeichnet man sich einen Punkt, von dem aus man zu dem einen Endpunkt der zu messenden Richtung kommen kann, hier also x, mit einem Stabe. Die Länge der Richtung x k wird gemessen und von x zurükkgetragen, so dass x r = x k ist und beide in einer Richtung liegen. Darauf misst man den Wnikel k und trägt ihn an r in entgegengesetzter Richtung an, so dass ∠ r = ∠ k ist. Den neuen Schenkel des Winkels r macht man so lang, dass sein Endpunkt mit x und s, was sich ersehen lässt, in einer Richtung liegt. Diesen Punkt, hier v, bezeichnet man mit

einem Stabe und misst seine Entfernung von r, die so viel betragen muss, als der Abstand von k bis s; denn die Dreiekke rxv und kxs dekken sich, weil

$$kx = xr \text{ (so gemacht)}$$
$$\angle k = \angle r \text{ (so gemacht)}$$
$$\angle i = \angle o \text{ (Scheitelwinkel).}$$

2) Auf ähnliche Weise lässt sich die Breite eines Flusses messen. Es soll z. B. (Zeich. 138) die Breite des Flusses AB gemessen werden. Man bezeichnet zu diesem Behuf zwei gegenüber liegende Uferpunkte, hier c und b, durch Stäbe, wählt sich auf der einen Seite einen Punkt neben dem Ufer, hier o. Die Seiten bo und co werden verlängert, und or = co gemacht; den Winkel c trägt man an r und verlängert den freien Schenkel, so wie bo so lange, bis sie sich (hier in a) durchschneiden; so muss $\triangle$ ora $\cong$ ocb sein, mithin ar = cb, und man kann Ersteres statt Letzteres messen.

1) Soll man die Entfernung zweier Oerter messen, zwischen denen und vor denen ein Hinderniss ist, so geht dies ebenfalls. Ist z. B. aufgegeben (Zeich. 139) die Entfernung der Berge A und B von einander zu ermitteln, zwischen denen und vor denen Wasser fließt, so wählt man sich einen Standpunkt, hier O. Von diesem aus errichtet man an beiden Seiten 2 beliebige Striche, hier Oi und Og, jeden theilt man (hier bei n und u) in 2 gleiche Theile, und trägt an i den Winkel BOn und an g den Winkel AOg, darauf verlängert man die Schenkel, bis sie sich mit den von B durch n und von A durch u gezogenen Strichen durchschneiden. So müssen

niv $\cong$ nOB (eine Seite mit den anliegenden
ugk $\cong$ uOA (Winkeln (§. 132.)

$$\frac{vi = BO}{kg = AO}$$

Jetzt verlängert man AO und BO, so daſs OR = gk, d. i. AO und OS = v i, d. i. BO gemacht wird, so muſs

$\triangle$ OSR $\cong$ OBA sein;

denn 2 Schenkel mit dem eingeschlossenen Winkel (Scheitelwinkel) sind gleich (§. 170.) Folglich ist auch SR = AB, und man kann Ersteres statt Letzteres messen.

§. 174. Gleichheit der Winkel an gleichen Schenkeln in einem Dreiekk. (Lehrsatz.) In einem gleichschenkligen Dreiekk müssen die Winkel gleich sein, die den gleichen Schenkeln gegenüber stehen. — Das Dreiekk cba (Zeich. 83) ist gleichschenklig, nämlich ab = cb, und darum muſs auch $\angle$c = $\angle$a sein. Um dies zu beweisen, ziehe man von der Seite ca aus einen Strich, der den Winkel b in 2 gleiche Theile theilt. Dadurch hat man 2 Dreiekke erhalten, die sich dekken; denn

$$\left.\begin{array}{l} db = db \\ ab = bc \\ \angle r = \angle v \end{array}\right\} \text{§. 170!}$$

Dekken sich aber beide Dreiekke, so müssen auch die Winkel, die gleichen Seiten gegenüber stehen, sich gleich sein, also hier auch c und a. Das sind aber auch die Winkel, die den gleichen Seiten in dem einen gleichschenkligen Dreiekk abc gegenüber stehen.

§. 175. Nächste Folgerungen aus dem vorigen §.

1) In einem gleichseitigen Dreiekke müssen alle drei Winkel von einer Gröſse sein; denn sie sind doppelt gleichschenklig.

2) Will man ein gleichseitiges Dreiekk in 3 sich dekkende Dreiekke theilen, so theilt man jeden der drei Winkel in gleiche Theile, und verlängert die Schenkel bis zur Berührung. Man erhält so 3 sich dekkende stumpfwinklig gleichschenklige Dreiekke (Zeich. 134). Die drei Dreiekke

müssen sich dekken, da in allen dreien eine Seite gleich ist und die beiden anliegenden Winkel gleiche Theile von gleichen Winkeln sind.

3) Will man ein gleichseitiges Dreiekk in 3 sich dekkende Vierekke theilen, so sezt man auf die Mitten der Seiten winkelrechte Striche, und verlängert sie (Zeich. 135) bis zur Berührung in o. Zum Beweise theile man die Vierekke durch Geeren aus den Dreiekkspizen zum Mittelpunkt in Dreiekke, die sich dekken (wie bei 2).

§. 176. Entferntere Folgerungen aus §. 174.

1) In einem gleichschenkligen Dreiekk müssen die Außenwinkel an den gleichen Winkeln gleich sein, z. B. (Zeich. 127) ao und sr; denn sie bilden mit den gleichen Winkeln x v Nebenwinkel.

2) Bei einem gleichseitigen Dreiekk müssen alle Außenwinkel gleich sein.

3) Weil ein regelmäßiges Vielekk (Zeich. 56 und 58) sich durch Striche aus dem Mittelpunkt in lauter gleichschenklige Dreiekke zerlegen lässt, deren gleiche Winkel am Umfange liegen, so müssen auch die Außenwinkel bei diesen regelmäßigen Vielekken unter einander gleich sein.

§. 177. Gleiche Schenkel in einem Dreiekk, bedingt durch 2 gleiche Winkel. (Lehrsaz.) Sind 2 Winkel in einem Dreiekk gleich groß, so müssen auch die ihnen gegenüber stehenden Schenkel gleich lang sein. — Ist z. B. (Zeich. 83) $\angle a = \angle c$, so muss cb = ab sein. Zum Beweise ziehe man einen beliebigen Strich, hier ca, theile ihn in 2 gleiche Theile, dc und da, und seze auf den Theilungspunkt d einen rechtwinkligen Strich, bd. Darauf trage man an c und a zwei gleiche Winkel an, und verlängere deren freie Schenkel bis zur Berührung des winkelrechten Striches, db. Diese Berührung muss in einem gemeinsamen Punkte, hier b, stattfinden, weil wegen der Gleichheit von da und cd, von $\angle a$ und $\angle c$, und von $\angle i$ und $\angle o$ auch die Gleich-

heit der Winkel r und v erfolgt, und diese verlangt, dass ab sich zu db richtet wie cb zu db. Kommen aber cb und ab auf einen Punkt von db zusammen, so haben wir zwei sich dekkende Dreiekke; weil

cd = da
∠o = ∠i
∠c = a ist.

Dekken sich beide Dreiekke, so müssen auch bc und ba gleich sein; sind die gleich, so ist auch das Dreiekk cba gleichschenklig.

§. 178. Folgerung aus §. 177. Sind drei gleiche Winkel in einem Dreiekk, so ist dasselbe nothwendig gleichseitig.

§. 179. Dekkung der Dreiekke, bedingt durch 3 Seiten. (Lehrsatz.) Haben 3 Seiten in einem Dreiekk, jede einzeln genommen, dieselbe Größe, welche 3 Seiten, einzeln genommen, in einem andern Dreiekk besitzen, so müssen auch in beiden Dreiekken, die den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel, und also die Dreiekke unter einander gleich und ähnlich sein, oder sich dekken. — Legt man (Zeich. 75) die Seite AC auf ac, so dekken sie sich, nimmt man darauf die Seiten AB und BC, und legt sie in eine andere Lage, als ab und bc haben, so werden sie nicht genau mit ihren Endpunkten zusammenstoßen. Wollte man z. B. den Winkel A größer machen als a, so reichte der Strich BC nicht, wollte man ∠A kleiner machen als ∠a, so würde die Seite BC zu lang sein; nur wenn man genau Winkel A gleich macht dem ∠a, und ∠C dem ∠c, werden sich die Seiten in B berühren. Die Winkel A und C werden also gleich gemacht den Winkeln a und c; die Seiten AB und BC haben dieselbe Richtung, als ab und bc, mithin muss auch ∠B = ∠b sein. So dekken sich alle drei Winkel.

§. 180. Folgerungen aus dem vorigen §.

1) Sind 3 einzelne Seiten zu einem Dreiekk gegeben, so ist das Dreiekk dadurch bestimmt, so dass es nicht größer und kleiner sein kann. Sind 3 Punkte zu einem Dreiekk angewiesen, so ist des Dreiekkes Lage damit gegeben. Zur leichten Abtragung der Dreiekke kann man sich eines dreifüßigen Zirkels bedienen, dessen Spizen man in die Dreiekkpunkte einsezt.

2) Will man Vierekke und Vielekke abtragen, so kann man sie in Dreiekke verwandeln, und jedes einzelne nach den Seiten abtragen.

3) Krummstrichige Zeichnungen kann man leicht abzeichnen, wenn man sie mit Dreiekken überzieht, wovon die Winkelpunkte gerade in die wichtigsten Punkte der Zeichnung fallen. (Vergl. §. 169.)

4) Alle regelmäßigen Vierekke (z. B. 64 und 65) werden durch Geere in 2 sich dekkende Dreiekke getheilt; weil drei Seiten in dem einen Dreiekk gleich sind, drei Seiten in dem andern.

5) Auch solche Vierekke werden durch eine Geere in 2 gleiche Theile getheilt, in denen je 2 und 2 Seiten neben einander gleich sind, wenn man die Geere so zieht, dass je 2 ungleiche Seiten auf jede Seite fallen, und nicht zwei gleiche.

6) Alle regelmäßigen Vielekke werden durch Geerstriche, die 2 entgegengesezte Winkel, nach Art des Durchmessers, in 2 gleiche Winkel theilen, überhaupt in 2 sich dekkende Flächen zerlegt, z. B. 57 durch a d oder 56 durch a b.

7) Das gleichseitige Dreiekk im Kreise ist halb so groß, als das regelmäßige Sechsekk in demselben Kreise. Zeichnung 174 ist n w s = ½ m n r s v w; denn bei einem im Kreis beschriebenen Sechsekk sind die Seiten so groß als die Strahlen; mithin dekken hier 3 äußere Dreiekke die drei innern, n r s dekkt n o s u. s. w.

8) Ein regelmäßiges Sechseck kann, vermittelst dreier Strahlen, leicht in 3 Rauten verwandelt werden, wovon jede $\frac{1}{3}$ des Secheckes ist. Zeichn. 174 ist das Sechseck **m n r s v w** in folgende 3 Rauten zerlegt: **n o r s**, **s o v w** **w o m n**.

9) Ein regelmäßiges Sechseck wird in eine gleiche Raute verwandelt, wenn man ein gleichseitiges Dreieck einschreibt, und über eine Seite desselben ein gleiches und ähnliches Dreieck verzeichnet. So ist Zeich. 174 das Sechseck **n r s v w m** in die Raute **n w s b** verwandelt; denn **n s w** ist = $\frac{1}{2}$ **n r s v w m**; und **n b s** = **n s w**.

10) Eine Raute oder Schrägraute muss gleich sein einem Rechteck, mit dem es gleichen Grund und gleiche Höhe hat (vgl. §. 160), weil (Zeich. 62) das Dreieck, was man von der einen Seite der Raute wegschneidet, gleich und ähnlich dem Dreieck ist, was man auf der andern Seite ansetzt, wenn man die Verwandlung in ein Rechteck vornimmt.

§. 181. Folgerung aus den §§. 170, 172, 179. Will man ein Dreieck einem andern gleich machen, so braucht man nicht alle Winkel und alle Seiten zu messen, sondern man hat die Wahl zwischen Folgendem:

a) 1 Winkel mit den einschließenden Schenkeln;
b) 1 Seite mit den anliegenden Winkeln;
c) alle 3 Seiten.

Oder will Jemand angeben, wie groß ein Dreieck sein soll, so braucht er nur die Angaben in diesen Stükken zu machen.

§. 182. Begründung der Winkeltheilung. (Folgerung.) Will man einen Winkel, z. B. **a d b**, (Zeich. 79) in zwei gleiche Theile theilen, so macht man (siehe §. 59) die Schenkel gleich, beschreibt von ihren Enden über den Winkel Kreisbogen, und verbindet den Durchschnittspunkt mit dem Winkelpunkt (hier **c** mit **d**), so müssen die Winkel **i** und **o** sich gleich sein; denn:

$$\begin{aligned} da &= db \quad \text{(gemacht)} \\ bk &= ak \quad \text{(Strahlen gleicher Kreise)} \\ cd &= cd \end{aligned}$$

$$\triangle kdb \cong kda$$

$$\angle c = \angle o$$

Der Kreisbogen mn, als das Maaß des Winkels, wird damit zugleich in 2 gleiche Theile getheilt. Durch Fortsetzung der Theilung kann man einen Winkel und einen Bogen leicht in 4, 8, 16 u. s. w. Theile zerfällen.

§. 183. Anwendung des vorigen §. auf den Mittagsstrich. Auf die Winkeltheilung gründet sich das Ziehen des Mittagsstriches, eines Striches, auf den genau der Schatten eines Stabes um Mittag fällt, der also, wagerecht gelegt, genau von Mittag nach Mitternacht geht, und darauf das Verfertigen der Sonnenuhren. Will man nämlich den Mittagsstrich (die Mittagslinie, den Meridian) wissen, so zeichnet man auf eine Ebene einen Kreis, und stellt in dessen Mittelpunkt einen Stab. Diese Ebene setzt man wagerecht, und das an einer solchen Stelle, wo sie der Sonne am besten ausgesetzt ist, also an einem Gebäude gegen Mittag. Die langen Sommertage wählt man am liebsten zur Errichtung des Mittagsstriches. Bei Aufgang der Sonne wird der Schatten des Stabes sehr lang sein, je höher die Sonne kommt, desto mehr sich aber verkürzen. Nun merkt man den Zeitpunkt ab, in welchem das Ende des Schattens genau in den Umkreis trifft, und bezeichnet die Stelle. Darauf wird bis Mittag hin der Schatten sich verkürzen, und von da an wieder länger werden. Da paßt man von Neuem den Zeitpunkt ab, in welchem das Schatten-Ende in den Umkreis fällt, und bezeichnet die Stelle. Den durch beide Punkte begrenzten Kreisbogen theilt man durch einen Strich, der von dem Kreismittelpunkt ausgeht, in zwei

gleiche Theile, und dieser Strich muſs der Mittagsstrich sein. Fällt in ihn der Schatten, der dabei auch am kürzesten ist, so trifft Mittag. Hat man diesen Strich, so kann man die Sonnenuhr sowohl durch Hülfe guter Uhren, als auch durch richtige Eintheilungen leicht machen.

§. 184. Begründete Errichtung eines rechten Winkels an einem Punkt in einem Strich. (Lehrsatz.) Will man auf einem Punkt eines Striches einen andern Strich winkelrecht setzen, ohne sich des Winkelmaaßes zu bedienen (vergl. §. 12!), so schneidet man auf beiden Seiten des Punktes gleich große Stükke von dem Striche ab, und beschreibt mit gleichen Zirkelöffnungen Kreisbogen über den Strich. Vereinigt man darauf den Durchschnittspunkt der Kreisstriche mit dem gegebenen Punkt, so hat man den winkelrecht gesetzten Strich. Es sei z. B. (Zeich. 76) auf dem Strich i e der Punkt a gegeben, um darauf einen winkelrechten Strich zu ziehen. Man schneidet von a aus die gleichen Stükke a i und a e ab, beschreibt mit einer beliebigen Zirkelöffnung von i und e aus Kreisbögen, den Durchschnitspunkt s vereinigt man mit a, und der Strich s a steht winkelrecht auf i e. Denn

i a = e a (so gemacht)
i s = e s (Strahlen gleicher Kreise)
a s = a s

$\triangle$ a s i $\cong$ $\triangle$ a s e

Da nun s e = i s ist, so muſs auch $\angle$ u = $\angle$ o sein; und gleiche Nebenwinkel sind rechte Winkel.

§. 185. Begründete Errichtung eines rechten Winkels von einem gegebenen Punkt auf einen gegebenen Strich. (Lehrsatz.) Soll man von einem Punkt, der außerhalb eines gegebenen Striches steht, z. B. von dem Punkt a (Zeich. 77) einen winkelrechten Strich auf den gegebenen Strich (hier k r) ziehen, so zerschneidet man zuerst von dem gegebenen Punkt aus (hier

von a aus) den gegebenen Strich (kr) durch einen Kreisbogen (hier iu) an 2 Stellen. Von den 2 Durchschnittspunkten beschreibt man mit einer beliebigen Zirkelöffnung Kreisbögen oberhalb oder unterhalb des Punktes oder des Striches (hier unterhalb beider) und verbindet den Durchschnittspunkt (hier b) mit dem gegebenen Punkt (a). Der Verbindungsstrich (hier ab, oder in seiner Verkürzung ao) muſs rechtwinklig auf dem gegebenen Strich stehen. Denn in unserm Beispiel ist:

$ia = ua$ (Strahlen desselben Kreises)
$ib = ub$ (Strahlen gleicher Kreise)
$ab = ab$

$\triangle iab \cong \triangle uab$

$\angle v = \angle s$
$ia = ua$
$ax = ax$

$\triangle aix \cong aux$

$o = z$

$o = 90$ Gr. und $z = 90$ Gr.

§. 186. Begründete Strichtheilung. (Lehrsatz.) Will man einen graden Strich, ohne versuchsweis zu verfahren, genau in 2 gleiche Theile theilen, z. B. den Strich ia (Zeich. 78), so beschreibt man (vergl. §§. 55 und 56) von dessen Endpunkten aus oben und unten Kreuzbogen, und verbindet die Kreuzpunkte mit einander. Der Verbindungsstrich (hier bd) theilt den Strich ia genau in 2 gleiche Theile; denn:

$ib = ab$
$id = ad$
$db = db$

$\triangle ibd \cong adb$

$\angle v = \angle s$
$ib = ab$
$xb = xb$

$\triangle ibx \cong \triangle abx$

$ix = xa.$

Könnte man nur unten oder nur oben Kreisbögen schlagen, so müsste man 2 verschiedene Zirkelöffnungen nehmen, um so ebenfalls 2 Durchschnittspunkte zu erhalten, diese verbinden und den Verbindungsstrich bis auf den zu theilenden Strich verlängern. Der Beweis von der Richtigkeit dieser Art Strichtheilung springt von selbst in die Augen, weil er im Wesentlichen mit dem oben gegebnen zusammenfällt.

§. 187. Folgerungen aus §. 186.

1) Will man um einen Strich einen Kreis ziehen, so dass der Strich der Durchmesser wird, so theilt man ihn in zwei gleiche Theile, und macht dann die eine Hälfte zum Strahl.

2) Will man ein gleichschenkliges Dreiekk in 2 gleiche und ähnliche Dreiekke zerlegen, so theilt man die dritte Seite in 2 gleiche Theile, und verbindet den Theilungspunkt mit dem entgegenstehenden Winkelpunkt.

3) Will man ein regelmäßiges Viereкk in 2 gleiche und ähnliche Vierekke zerfällen, so theilt man 2 gleichlaufende Seiten desselben, jede in 2 gleiche Theile, und verbindet die Theilungspunkte mit einander.

4) Will man bei einem Kreis-Durchmesser den Mittelpunkt wissen, so theilt man ihn in 2 gleiche Theile.

III. Seiten- und Winkel-Gleichungen in Dreiekken und Vierekken.

§. 188. Betrag aller Winkel in einem Dreiekk. (Lehrsatz.) Alle Winkel in einem gradstrichigen Dreiekk betragen zusammen 180 Grad. — Bei der Zeich. 82 betragen die Winkel **oec** zusammen 180 Grad als Winkel auf einem Strich. Statt **o** kann man **u**, und statt **c** dagegen **a** setzen, sobald **sr** gleichlaufend mit **mn** gezogen ist, weil man ja denn gleiche Wechselwinkel hat. Betragen also **oec** 180 Grad, so müssen auch **eua** dasselbe betragen.

§. 189. Folgerungen aus §. 188.

1) Weil nach §. 150 die Winkel in einem regelmäßigen Viereck zusammen genommen 360 Grad betragen, so betragen die Winkel in einem jeden regelmäßigen Viereck noch ein Mal so viel, als die in einem Dreieck.

2) Da man jedes Viereck durch eine Geere in 2 Dreiecke theilen kann, so müssen die Winkel jedes Viereckes zusammen 360 Grad betragen.

3) In einem gleichseitigen Dreieck muss jeder Winkel $\frac{180}{3}$ oder 60 Grad betragen; denn alle Winkel sind gleich (§. 175). Setzt man 6 gleiche Winkel um einen Punkt, so enthält jeder 60 Grad; macht man alle 6 Schenkel gleich lang, und verbindet sie durch Striche, so müssen die beiden andern Winkel, wegen der gleichen, ihnen entgegen stehenden Seiten, gleich sein, auf beide fällt 120 Gr., mithin auf jeden 60. Daraus folgt, dass alle 6 Dreiecke gleichseitige sind, und dass in einem regelmäßigen Sechseck jede Außenseite so lang ist, als ein Strich von einem Winkelpunkte zu dem Mittelpunkt gezogen. Hierauf gründet sich die §. 30 angegebene Art, das regelmäßige Sechseck zu bilden.

4) In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck beträgt jeder der kleinen gleichen Winkel 45 Gr. (§. 175.)

5) In einem Dreieck kann nur ein rechter oder ein stumpfer Winkel vorkommen, weil von 180 Grad etwas für den dritten Winkel übrig bleiben muß.

6) Nur 7 Dreiecke sind möglich, nämlich 3 ungleichseitige, 3 gleichschenklige, aber nur ein gleichseitiges, weil in einem gleichseitigen Dreieck kein stumpfer und kein rechter Winkel vorkommen darf, indem alle 3 Winkel gleich sind.

§. 190. Berechnung des dritten Winkels in einem Dreieck aus 2 bekannten. (Folgesatz.) Weiß man in einem Dreieck den Betrag zweier Winkel, so weiß man auch den Betrag des dritten; oder dekken

sich in zwei Dreiekken je 2 Winkel, oder ist in 2 Dreiekken der Betrag von 2 Winkeln ganz gleich, so müssen sich ihre dritten Winkel dekken. Ist darum in einem Dreiekk eine Seite mit einem anliegenden und einem gegenüber stehenden Winkel so groß als eine Seite mit einem anliegenden und einem gegenüber stehenden Winkel in einem andern Dreiekk, so müssen beide sich dekken, weil denn auch die dritten Winkel gleich sind, und mithin §. 172 eintritt.

§. 191. Der Winkel am Dreiekk, gleich den 2 entfernten Winkeln im Dreiekk. (Lehrsatz.) Verlängert man bei einem Dreiekk eine Seite, z. B. Zeich. 84 die Seite ge zu go, so muss der äußere Winkel (hier i) so groß sein, als die beiden, nicht an ihm liegenden Winkel des Dreiekkes (hier wie a und u); denn:

$$i\ r = 180 \text{ Gr.}$$
$$a\,u\,r = 180 \text{ Gr.}$$
$$r = r$$
$$i = a + u.$$

§. 192. Folgerungen aus und Anwendungen von §. 191.

1) Kann man auf dem Felde einen Winkel, den man zu messen hat, nicht messen, so misst man einen andern dafür, und zieht den vom Außenwinkel des dritten ab, so ist das Uebrigbleibende der zu messende Winkel. Sollte man z. B. (Zeich. 84) u messen, und wäre dies wegen eines Hindernisses unmöglich, so misst man a, und schneidet von i seinen Betrag ab; was bleibt, muss u sein.

2) Auch die Winkelmessung aus verkehrter Richtung gründet sich auf §. 191. Soll man z. B. (Zeich. 140) den Winkel aoc von der Flussseite vr messen, so äugelt man 2 Punkte aus, die mit co und ao in grader Richtung liegen, hier v und r; diese ver-

bindet man und dehnt das eine Ende der Verbindung hier nach x hin, aus. Darauf misst man den Winkel vro und trägt ihn auf xvo, was übrig bleibt, muss vor oder aoc sein.

3) Werden 2 gleichlaufende Striche von den beiden Schenkeln eines Winkels, jeder Strich von einem Schenkel, durchschnitten, so ist der Winkel so groß, als die beiden Winkel hinter ihm. Zeich. 141 sind ab und cd gleichlaufend, und ersteres ist vom Schenkel oe, letzteres vom Schenkel of durchschnitten, deshalb muss

$$\angle r = \angle i + \angle u \text{ sein.}$$

Zum Beweise verlängere man eo bis auf cd, dadurch erhält man das Dreiekk okz. An diesem Dreiekk ist r ein äußerer Winkel; darum ist

$$\angle r = \angle u + okz$$
$$okz = \angle i \text{ (Wechselwinkel)}$$
$$\overline{}$$
$$\angle r = \angle u + \angle i.$$

Wäre das Dreiekk okz gleichschenklig, nämlich ok = oz, so müssten auch i und u gleich sein. Wäre $\angle r$ dazu ein rechter, so müsste $\angle$ i 45 und $\angle$ u 45 Grad betragen.

4) Ist der Grund eines gleichschenkligen Dreiekkes der gleiche Schenkel eines andern gleichschenkligen Dreiekkes, dessen zweiter gleicher Schenkel mit einem der ersten in derselben Richtung liegt, so sind die Grundwinkel des letztern nur $\frac{1}{2}$ von den Grundwinkeln des ersten. — Es sind (Zeich. 142) 2 gleichschenklige Dreiekke; ab ist der Grund von adb, und ein gleicher Schenkel von abc, dessen anderer gleicher Schenkel bc mit bd in einer Richtung liegt. Es soll nun jeder der Winkel bac und bca $\frac{1}{2}$ sein von den Winkeln dba und dab.

Bei dem Dreiekk abc ist der Winkel abd ein Außenwinkel, und mithin ist:

$\angle abd = \angle bac + \angle bca$
$\angle bac = \angle bca$

$\angle abd = \angle bac + \angle bac$

$\frac{1}{2} \angle abd = \angle bac$
$\angle abd = \angle dab$

$\frac{1}{2} \angle dab = \angle bac$ oder
$\frac{1}{2} \angle dab = \angle bca.$

§. 193. Der größte Winkel entsprechend der längsten Seite im Dreiekk. (Lehrsatz.) In jedem Dreiekk steht der größere Winkel der längsten Seite entgegen. — Es sei (Zeich. 129) ac die längste Seite, so muſs abc der größte Winkel sein, also größer als c und größer als a. Um zu beweisen, daſs er größer als c ist, trägt man ab auf ac, so daſs ar = ab wird.

$\angle u = \angle n + v$ (§. 174)
n ist größer als c, denn es ist ein Außenwinkel vom Dreiekk brc.

$\angle n + \angle v$ größer als c,

$\angle n + \angle v \angle o$ größer als c.

Um zu beweisen, daſs b größer ist als a, trägt man bc auf ac, so daſs bc = tc ist.

$k = n + o$ (§. 174)
k ist größer als a; denn k ist Außenwinkel vom Dreiekk abt

n + o größer als a

n + o + v größer als a.

§. 194. Die längste Seite, entsprechend dem größten Winkel. (Lehrsatz.) In jedem Dreiekk steht dem größten Winkel die längste Seite gegenüber. — Wenn z. B. (Zeich. 129) im Dreiekk abc der Winkel b der größte ist, so muſs auch ac die längste Seite sein;

denn sollte ab so lang sein, so müsste Winkel b gleich c sein, sollte bc so lang sein, so müsste ∠a = ∠b sein. Sollte ab größer sein, müsste ∠ c größer als ∠b sein, (§. 194), sollte b c größer sein, müsste ∠ a größer als ∠ b sein. Es gibt außer diesen 4 Fällen, die nicht stattfinden können, nur den 5ten dass ac am längsten ist.

§. 195. Folgerungen aus §. 194.

1) In einem rechtwinkligen Dreiekk ist die Seite die längste, die dem rechten Winkel gegenüber steht, und in einem stumpfwinkligen die, so dem stumpfen Winkel gegenüber steht.

2) Bei Gevierten und Rechtekken sind die Geeren größer, als eine der Seiten.

3) Die kürzesten Seiten und kleinsten Winkel, so wie die mittlern Seiten und mittlern Winkel sind in einem Dreiekk durch einander bedingt, und stehen einander entgegen.

§. 196. Verhältniss der Seiten in Dreiekken. (Lehrsatz.) In keinem Dreiekk kann die längste Seite so lang sein, oder gar länger, als die beiden andern Seiten zusammen; immer sind zwei Seiten zusammen länger, als die dritte. Es ist dieser Satz im Wesentlichen schon §. 117 erschauet; er lässt sich aber auch auf folgende Art beweisen: Wir nehmen (Zeich. 93) das Dreiekk abd. Es müssen darin ad + ab länger als db sein. Um den Beweis zu führen, verlängere man ab und zwar so weit, dass ca = ad ist, und ziehe den Strich cd. Der Winkel acd muss dann gleich dem Winkel cda (§. 174) sein. Die Winkel adb + adc müssen größer sein, als adc allein; mithin auch größer als acd allein. Daraus folgt (§. 195, 3), daß cb größer ist als db. Da nun cb = ist ad + ab, so ist ad + ab größer als db.

Das Winkelverhältniss entspricht nicht auf diese Weise dem Seitenverhältniss in Dreiekken. Ein Winkel in einem Dreiekk kann viel größer sein, als die beiden andern zusammen genommen. In jedem stumpfwinkligen Dreiekk ist ja der stumpfe Winkel größer, als die beiden andern spitzen Winkel.

§. 197. Theilung der regelmäßigen Vierekke in gleiche und ähnliche Dreiekke und Gleichheit der gegenüber stehenden Seiten und Winkel in regelmäßigen Vierekken. (Folgesatz.) Jedes regelmäßige Viereck wird durch eine Geere in zwei sich dekkende Dreiekke zerlegt. — Zeich. 85 ist eine Schrägraute durch die Geere b c in 2 gleiche Dreiekke getheilt; denn

$$\begin{array}{l} bc = bc \\ \left.\begin{array}{l} a = i \\ o = n \end{array}\right\} \text{Wechselwinkel.} \\ \hline \triangle\, cbv \cong \triangle\, bcr\ ^{*}). \end{array}$$

Daraus folgt zugleich, daß in jedem regelmäßigen Vierekk die gegenüber stehenden Seiten und Winkel sich gleich sein müssen.

§. 198. Anwendungen des vorigen §.

1) Soll man eine Erhöhung messen, die von ihrem Grunde aus zugänglich ist, z. B. einen Berg, so geht dies durch Errichtung rechter Winkel. Soll man z. B. (Zeich. 145) die Höhe des Berges a b c, also eigentlich den Strich b h messen, so errichtet man am Fuß a den senkrechten Stab d a, misst ihn und zieht von der Spitze desselben einen wagerechten Strich (hier d k) dem Berge zu (vergl. §. 156); in k wird von Neuem ein Stab er-

*) Anmerkung. Wie wir diesen Folgesatz aus §. 172 hergeleitet haben, so lässt er sich gleicherweise auch aus §.§. 170 und 179 herleiten.

richtet und gemessen. Von seiner Spitze e zieht man einen wagerechten Strich (hier e b), der auch hier mit der Spitze des Berges zusammenfällt. Sollte er das noch nicht, so müsste von Neuem ein Stab errichtet werden u. s. w. Die senkrechten Stäbe misst man alle, und ihr Betrag liefert die Höhe des Berges. Hier muss also d a und e k = b h sein; denn

$$da = kz = rh$$
$$ek = br.$$

2) Auch die Entfernung von 2 Punkten, zwischen denen ein Berg liegt, hier von a c. lässt sich auf ähnliche Weise messen. Man geht nämlich, nach Vollbringung der unter 1 angegebenen Messungen, von der Spitze des Berges zur entgegengesetzten Seite herunter, stets rechte Winkel bildend, hier b f w und w g c. Darauf misst man alle wagerechten Richtungen, hier d k, e b f und w g, ihr Betrag ist gleich a c; denn:

$$dk = az$$
$$ef = zv$$
$$wg = vc.$$

IV. Flächengleichungen ohne Dekkung.

§. 199. **Gleichheit der regelmäßigen Vierekke bei gleichem Grunde und gleicher Höhe.** (Lehrsatz.) Alle regelmäßigen Vierekke, welche gleichen Grund und gleiche Höhe besitzen, haben (wie schon bei §. 160, Zeich. 62, und bei §. 180, 10 erschauet wurde) gleichen Geviertinhalt. Wem die Anschauung nicht genügt, der kann diese Wahrheit noch auf folgende Art (siehe Zeich. 141) beweisen:

Die beiden regelmäßigen Vierekke (hier Schrägrauten) s t v w und v d b w haben den gleichen Grund v w, so wie, wegen ihrer Lage zwischen 2 gleichlaufenden Strichen, gleiche Höhe. Beide Vierekke haben das Stükk o v w mit einander gemein. Es ist also nur zu zeigen,

daß stvo und dvwb gleichräumig sind. Um dies zu zeigen, fügt man jedem Stükke das Dreiekk tod bei; und man hat statt ihrer die beiden Dreiekke svd und twb. Diese müssen sich dekken nach §. 179. Dekken sich aber diese Dreiekke, so müssen sich auch die Stükke dekken, welche übrig bleiben, nachdem man von beiden das ihnen gemeinsame Stükk tod weggenommen hat. Dekken sich die Stükke stvo und dowb, so müssen sich auch beide Vierekke dekken, indem sie aus jenen Stükken und dem gemeinsamen Stükk vow bestehen.

Man kann also jedes regelmäßige Vierekk in ein andersförmiges gleichräumiges verwandeln, wenn man nur den Grund und die Höhe beibehält.

§. 200. Gleichheit der Dreiekke bei gleichem Grunde und gleicher Höhe. (Folgerung.) Da jedes Dreiekk als die Hälfte von einem regelmäßigen Vierekk betrachtet werden kann, mit dem es gleichen Grund und gleiche Höhe hat, so folgt daraus von selbst, daß alle Dreiekke, sie mögen so verschiedenförmig sein, als sie wollen, gleichräumig sein müssen, wenn sie gleichen Grund und gleiche Höhe haben.

§. 201. Gleichräumigkeit von einem Dreiekk und einem Vierekk. Ein Dreiekk hat mit einem regelmäßigen Vierekk gleichen Flächen-Inhalt, wenn es bei gleichem Grund die doppelte Höhe, oder bei gleicher Höhe den doppelten Grund von jenem enthält. Will man also ein regelmäßiges Vierekk in ein Dreiekk verwandeln, was gleichräumig ist, so nimmt man entweder dieselbe Höhe und den doppelten Grund, oder die doppelte Höhe und denselben Grund.

§. 202. Verhältniß der Dreiekke zu einander bei gleichem Grunde oder gleicher Höhe. (Erklärung.) Dreiekke und regelmäßige Vierekke, die gleichen Grund haben, verhalten sich zu einander wie ihre Höhen, und die, welche gleiche Höhen haben, wie

ihre Grundstriche. Hat z. B. Dreiekk A 3 Zoll Höhe und 10 Zoll Grund, und Dreiekk a 3 Zoll Höhe und 8 Zoll Grund, so ist A $\frac{3 \times 10}{2}$ und a $\frac{3 \times 8}{2}$ □ Zoll. Es verhält sich aber $\frac{3 \times 0}{2}$ zu $\frac{3 \times 8}{2}$ wie 3×10 zu 3×8 oder wie 10 zu 8

§. 203. Der Höhenwinkel bei Dreiekken von gleichem Grund oder von gleicher Höhe. (Lehrsatz.) Haben zwei Dreiekke gleichen Grund, aber verschiedene Höhe, so ist der Höhenwinkel in dem höhern Dreiekk kleiner, als in dem niedrigern. — Zeich. 132 haben 3 Dreiekke denselben Grund a b, es muss darum ∠ e kleiner als d, und ∠ d kleiner als c sein. Die Ursache davon liegt darin, dass, je höher das Dreiekk wird, desto größer auch die Grundwinkel sind. Werden die Grundwinkel größer, so muss der Höhenwinkel abnehmen, weil in jedem Dreiekk alle Winkel 180 Grad betragen.

Bei 132 ist a d b ein gleichseitiges Dreiekk, darum betragen

∠ d a b = 60 Gr.
∠ d b a = 60 Gr.
∠ a d b = 60 Gr.
∠ a b e größer als a b d, also über 60 Gr.
∠ b a e größer als b a d, also über 60 Gr.

∠ a e b kleiner als a d b, also unter 60 Gr.

Der andere Satz: „Haben 2 Dreiekke gleiche Höhe, aber verschiednen Grund, so ist der Höhenwinkel in dem Dreiekk, das den längsten Grund hat, größer, als in dem andern;" braucht nicht erst bewiesen zu werden.

§. 204. Verwandlung eines regelmäßigen Vielekkes in ein gleichräumiges Dreiekk. (Aufgabe.) Man verwandelt ein regelmäßiges Vielekk in ein gleichräumiges Dreiekk, wenn man alle

Außenseiten zusammen zum Grundstrich, und einen Strich, der vom Mittelpunkt aus winkelrecht auf eine Außenseite gezogen ist, zur Höhe macht, oder umgekehrt, wenn man diesen Strich zum Grunde, alle Außenstriche zusammen aber zur Höhe macht.

§. 205. Verwandlung eines regelmäßigen Vielekkes in ein gleichräumiges regelmäßiges Viereкk. (Aufgabe.) Man verwandelt ein regelmäßiges Vielekk in ein regelmäßiges Viereкk von gleichem Raum, wenn man den Grund des Vierekkes gleich macht der Hälfte des Betrags der Außenseiten, und die Höhe gleich macht dem Strich, der vom Mittelpunkte aus winkelrecht auf eine Außenseite gezogen ist.

§. 206. Zeichnung eines bestimmten Rechtekkes, das einem gegebenen Geviert gleichräumig ist. (Aufgabe.) Soll man (Zeich. 146) ein Rechtekk machen, was mit einem gegebenen Geviert (hier mit ofki) gleichen Inhalt hat, und dessen eine Seite (hier kl) gegeben ist, so trägt man letztere (kl) an eine Seite des Gevierts, hier an fi, an, so dass cf = kl wird. Von c zieht man nach o und verlängert co und ik, bis sie sich in g durchschneiden. An g setzt man den Winkel ocf, und an c den Winkel ogk, die Schenkel verlängert man bis zur Durchschneidung in a, und zieht die Striche bo und do, ersteren mit cf, letzteren mit gk gleichlaufend, so muss das Rechtekk abod dem Inhalte nach gleich dem Geviert otki sein; denn:

$\triangle gci \cong \triangle cga$ (weil gc eine Geere ist)
$\triangle ofc \cong cbo$ (weil oc eine Geere ist)
$\triangle ogk \cong god$ (weil og eine Geere ist)

abdo = ofki (Gleiches von Gleichem gibt Gleiches. *)

*) Anmerk. Es lassen sich hieran noch viele andere Verwandlungen von Dreiekken, Vierekken und Vielekken, regelmäßigen und unregelmäßigen, anschließen.

§. 207. Verwandlung eines Kreises in ein gleichräumiges Dreiekk. (Aufgabe.) Will man einen Kreis in ein gleichräumiges Dreiekk verwandeln, so macht man den Umkreis zum Grundstrich und einen Strahl zur Höhe, oder den Strahl zum Grundstrich und den Umkreis zur Höhe. Den Umkreis berechnet man aus dem Durchmesser, zu dem er sich verhält wie 22 zu 7.

§. 208. Verwandlung eines Kreises in ein gleichräumiges regelmäßiges Vierekk. (Aufgabe.) Will man einen Kreis in ein gleichräumiges regelmäßiges Vierekk verwandeln, so macht man den halben Umkreis zum Grundstrich und einen Strahl zur Höhe, oder, umgekehrt, den halben Strahl zum Grundstrich und den ganzen Umkreis zur Höhe, oder den halben Umkreis zur Höhe und den Strahl zum Grundstrich, oder den halben Strahl zur Höhe und den ganzen Umkreis zum Grundstrich.

§. 209. Bildung von verhältnissmäßig größern Dreiekken und regelmäßigen Vierekken. (Aufgabe.) Will man Dreiekke haben, die zwei, drei u. s. w. Mal so groß sind, als ein gegebenes, oder regelmäßige Vierekke, die 2, 3, 4 u. s. w. Mal so groß sind, als ein gegebenes, so nimmt man entweder die Höhe oder den Grund so oft; z. B. es ist ein regelmäßiges Vierekk gegeben, 4 Zoll lang und 6 Zoll hoch, und soll eins gemacht werden, dessen Raum 4 Mal so groß ist, so nimmt man $4 \times 4 \times 6$ oder $4 \times 6 \times 4$ Zoll. Das gegebene Vierekk betrug 24 Zoll im □, das neue 96 im □, also ist es 4 Mal so groß.

§. 210. Geeren- und Seiten-Gevierte. (Erklärung.) Ueber die Seite jedes Dreiekkes lässt sich ein Geviert beschreiben. Bei einem rechtwinkligen Dreiekk nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, wohl vorzugsweise Geere (Hypothenuse),

und die dem rechten Winkel anliegenden Seiten vorzugsweise Seiten (Catheten). Darum heißt ein Geviert, welches über der Geere beschrieben ist, ein Geerengeviert (Quadrat der Hypothenuse), und die andern Gevierte heißen Seitengevierte (Quadrate der Catheten). Der griechische Weise Pythagoras hat ein sehr schönes Verhältniss zwischen den Geeren- und den Seiten-Gevierten ermittelt, und sehr sinnig die Richtigkeit dieses Verhältnisses in dem folgenden Satz entwikkelt, der wohl der Meister der Größenlehre (magister matheseos), oder auch, nach seinem Erfinder, der Lehrsatz des Pythagoras genannt wird.

§. 211. Die Seitengevierte sind gleich dem Geerengeviert. (Lehrsatz.) Die Seitengevierte zusammen genommen nehmen bei einem rechtwinkligen Dreiekk gerade so viel Raum ein, als das Geerengeviert allein. — Es ist (Zeich. 98) das rechtwinklige Dreiekk a c b gegeben, und es soll jetzt bewiesen werden, dass das Geerengeviert a b e d gleichräumig ist mit den beiden Seitengevierten a i h c und c b g f.

Zur Beweisführung zieht man von dem Winkelpunkt c aus einen Strich, gleichlaufend mit b d und a e; nämlich c k. Dadurch wird das Geviert a e b d in 2 Rechtekke zerlegt, in a e r k und r k b d. Könnte man jetzt beweisen, dass 1) c b g f gleich wäre r k b d, und 2) h i a c = a e r k, so wäre der Satz bewiesen. Das aber lässt sich beweisen. Wir fangen mit dem Letztern an, und ziehen uns zur Beweisführung die Striche i b und e c. Dadurch erhalten wir die Dreiekke i a b und c a e. Könnten wir die Dekkung dieser Dreiekke beweisen, so wäre der Satz selbst bewiesen; denn das Dreiekk i a b hat mit dem Geviert i a h c gleichen Grund (i a) und gleiche Höhe (a c), und ist also die räumliche Hälfte von diesem, und das Dreiekk a e c hat mit dem Rechtekk a r k e ebenfalls gleichen Grund (a e) und gleiche Höhe (a r)

und ist mithin ebenfalls die Hälfte von diesem. Sind sich aber die Hälften gleich, so müssen sich auch die Ganzen gleich sein.

Die Hälften aber, nämlich das Dreiekk i a b und das Dreiekk a e c, dekken sich in der That; denn:

a b in △ i a b = a e in △ e a c

i a in △ i a b = a c in △ e a c

∠ i a b in △ i a b = ∠ e a c in △ e a c.

(weil in beiden Fällen zum rechten Winkel ist dasselbe Stükk gethan worden).

Wir haben also den Fall, dass 2 Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel des einen Dreiekkes gleich sind 2 Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel in einem andern Dreiekk, und wissen darum, dass beide Dreiekke sich dekken.

Auf dieselbe Art, wie die räumliche Gleichheit von i a h c und a e r k ermittelt ist, lässt sich auch die von r b k d und c b g f nachweisen. Man zieht zu diesem Behuf die Striche a f und c d, wodurch man die Dreiekke a b f und c b d erhält, die beide sich dekken, und wovon das erste gleiche Höhe und gleichen Grund mit c b g f und das letzte gleiche Höhe und gleichen Grund mit r k b d hat.

§. 212. Folgerungen aus §. 211.

1) Weiß man in einem rechtwinkligen Dreiekk den Betrag von 2 Seiten, wovon eine eine Geere ist, so weiß man dadurch auch den Betrag der dritten. Es sei z. B. eine Seite 3 Zoll, die Geere 5 Zoll, so beträgt das Geviert der Geere 25 Zoll, das Geviert der andern 9 Zoll; es muss also das Geviert der dritten Seite 25 — 9, d. i. 16 Geviertzoll betragen; mithin die dritte Seite 4 Zoll lang sein.*)

*) Die Berechnung hat hier oft Schwierigkeiten, namentlich für den, der das Ausziehen der Geviertwurzeln (Quadratwurzeln) nicht kennt.

2) Man erhält sicher einen rechten Winkel, wenn man (§. 54, 3) 3 Längen zu einem Dreiekk zusammenlegt, deren Verhältniss ist: 3, 4, 5; nämlich der rechte Winkel steht der längsten Seite gegenüber. Ihr Geviert-Inhalt beträgt $5 \times 5 = 25$; der Geviert-Inhalt der beiden andern $3 \times 3 + 4 \times 4 = 9 + 16 = 25$. Mithin haben wir ein Geerengeviert, was so groß ist, als die beiden Seitengevierte zusammen. Dies kann aber nur da stattfinden, wo dem Geerengeviert ein rechter Winkel gegenüber steht. Wollten wir bei einem stumpfwinkligen, oder bei einem spitzwinkligen Dreiekk ein ähnliches Verfahren anwenden, so würden wir finden, dass die zum Beweis genommenen Dreiekke nicht gleiche Höhe mit den Gevierten und Rechtekken hätten.

3) Ist in einem rechtwinkligen Dreiekk die Geere und eine andere Seite gleich der Geere und einer andern Seite in einem andern rechtwinkligen Dreiekk, so müssen auch die dritten Seiten gleich sein, und also die Dreiekke sich dekken. Die dritten Seiten müssen in beiden Dreiekken gleich sein, da die über ihnen beschriebenen Gevierte nicht abweichen können.

4) In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiekk müssen die beiden Seitengevierte gleich sein, und jedes also die Hälfte von dem Geerengeviert betragen.

5) Ein Geviert um den Kreis (§. 74) ist noch ein Mal so groß, als eines im Kreise (§. 71), weil die Geere des letzten gleich einer Seite des ersten ist.

6) Will man ein Geviert haben, das zwei Mal so viel Raum enthält, als das gegebene, so beschreibt man ein Geviert über die Geere des Gevierts.

7) Will man ein Geviert haben, das drei Mal so groß ist, als ein gegebenes, so setzt man an die Geere eine Seite des Gevierts rechtwinklig an, und zieht eine neue Geere. Das über diese neue Geere beschriebene Geviert muss drei Mal so groß sein, als das gegebene.

Wollte man ein vier Mal, fünf Mal, sechs Mal u. s. w. Mal so großes als ein gegebenes haben; so könnte man mit dem rechtwinkligen Ansetzen einer Seite des gegebenen Gevierts an die vorhandene Geere nur fortfahren.

8) Wird ein Geviert verlangt, das so groß ist, als zwei gegebene, so errichtet man einen rechten Winkel, dessen einer Schenkel einer Seite des einen gegebenen Gevierts, und dessen anderer Schenkel einer Seite des andern gegebenen Gevierts gleich ist, zieht darauf die Geere und beschreibt darüber das Geviert. — Wird ein Geviert verlangt, so groß, als 3, 4, 5, 6 u. s. w. gegebene, so setzt man erst einen rechten Winkel aus den Seiten von zwei gegebenen Gevierten zusammen und zieht die Geere, an die Geere setzt man eine Seite des dritten Gevierts rechtwinklig und zieht die Geere. So fährt man fort, und setzt allmälig von allen Gevierten eine Seite an; z. B. es sind (Zeich. 99) die 5 Gevierte a, b, c, d, e gegeben, mit denen das Geviert q b r t gleichräumig ist; denn an a b ist a d angetragen, darauf die Geere b d gezogen, hieran d f rechtwinklig gesetzt, und die Geere b f gezogen, hieran f h gesetzt, und die Geere b h gezogen, hieran h t gesetzt, und auf die Geere b t das Geviert errichtet.

V. Gleichungen bei Kreisen und Vielekken.

§. 213. Sehnen, bedingt durch Bogen, und Bogen durch Sehnen. (Lehrsatz.) Wenn in einem Kreise oder in gleichen Kreisen ein Bogen einem andern gleich ist, so müssen auch die dazu gehörigen Sehnen gleich sein. — Hierauf gründet sich unser Verfertigen von regelmäßigen Vielekken, weil wir den Kreis in gleiche Bögen theilten und diese durch Sehnen verbanden.

Zum Beweise diene Zeichn. 91! Der Bogen A B soll dem Bogen A F gleich sein. Daraus erhellet:

$$\angle u = \angle o$$
$$RA = RA$$
$$RB = RF$$

$$\triangle ARB \cong \triangle ARF$$

Sehne AB = Sehne AF.

Das Umgekehrte ist ebenfalls wahr. Nämlich sind in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen die Sehnen gleich, so müssen es auch die Bogen sein. Wir nehmen die vorige Zeichnung zum Beweis:

Sehne AB = Sehne FA (der Annahme nach)
$RB = RF$ (Strahlen)
$$RA = RA$$

$$\triangle ARB \cong ARF$$

$$\angle u = \angle o$$

Bogen AB = Bogen FA.

§. 214. Der Winkel am Mittelpunkt ist 2 Mal so groß, als der am Umfang. (Lehrsatz.) In einem Kreise kann man 2 Winkel so stellen, daß des einen Winkelpunkt in den Mittelpunkt, des andern in den Umkreis fällt, während die Schenkel von denselben Bogen umspannt werden (s. Zeich. 92, a, b, c!). Die Schenkel des Winkels am Mittelpunkt sind dabei gleich, die Schenkel des Winkels am Umkreise können dabei gleich und ungleich sein. Der Mittelpunkt des Kreises kann entweder in einen Schenkel des Winkels am Umkreise fallen (92 a), oder zwischen beide Schenkel dieses Winkels (92 b), oder außerhalb der Schenkel desselben (92 c). In allen 3 Fällen läßt es sich zeigen, daß der Winkel am Mittelpunkt noch ein Mal so groß ist, als der Winkel am Umkreise, oder daß hier $\angle aoi = 2 \angle asi$ ist. Nämlich

1) bei 92, a findet sich Folgendes:

$$o\,s = o\,i \text{ (Schenkel desselben Kreises)}$$

$$\angle i = \angle s \text{ (§. 175)}$$
$$\angle i + \angle s = 2 \angle s$$
$$\angle i \text{ und } \angle s = 2\,x \text{ (§. 191.)}$$

$$\angle x \text{ oder } aoi = 2 \angle s \text{ oder } asi.$$

2) Bei 92, b ist der Beweis ganz von derselben Art. Man zieht von dem Winkelpunkt s einen Strich auf den Mittelpunkt o und verlängert diesen bis zur Berührung des Umkreises. Durch diesen Strich (hier s p) hat man den vorigen Fall 2 Mal, weil sp ein Schenkel ist, der durch den Mittelpunkt geht, und sowohl den Winkel asi als den Winkel aoi theilt. Es ist jetzt:

$$so = ao$$

$$\angle a = = v$$
$$\angle e = \angle v + \angle a$$

$$\angle e = 2 \angle v.$$

Ferner ist:

$$so = oi$$

$$\angle i = \angle x$$
$$\angle u = \angle x + \angle i$$

$$\angle u = 2 \angle x.$$

Aus beiden folgt:

$$\angle e + \angle u = 2 \angle v + 2 \angle x$$
$$\angle e + \angle u = \angle aoi$$
$$2 \angle v + 2 \angle x = 2 \angle asi$$

$$\angle aoi = 2 \angle asi.$$

Im dritten Fall bei 92, c zieht man von s gleichfalls einen Strich auf o und verlängert ihn bis r. Es muss jetzt

$$roi = 2\,rsi$$, aber auch
$$roa = 2\,rsa$$ sein; denn wir haben hier jedes Mal den ersten Fall;

$$\begin{array}{l} roi - roa = aoi \\ 2rsi - 2rsa = 2asi \\ \hline \angle aoi = 2\angle asi. \end{array}$$

§. 215. Folgerungen aus §. 214.

1) Da ein Winkel am Mittelpunkt in einem Kreise den Bogen, worauf seine Schenkel stehen, zum würklichen Maaß hat, so kann ein Winkel am Umkreis nur die Hälfte des Bogens zum Maaß haben, worauf er steht. Leicht ist es darum, einen Winkel am Umkreise ohne Weiteres zu bestimmen, wenn man seinen Bogen kennt.

2) Alle Winkel am Umkreise, die auf einem halben Kreisbogen, oder, was hier gleich ist, auf einem Durchmesser stehen, müssen einen Viertel-Kreisbogen, d. h. 90 Grad zum Maaß haben, und also rechte Winkel sein (§. 54). Alle Winkel am Umkreise, die mehr als einen halben Kreisbogen zum Maaß haben, müssen stumpfe, und die weniger haben, spitze sein. Die Dreiviertel-Kreisbogen zum Maaß haben, betragen 135 Grad, und die Viertel-Kreisbogen zum Maaß haben, 45 Grad.

3) Alle Winkel am Umkreise, oder alle Umkreiswinkel müssen, sie mögen lange oder kurze Schenkel haben, sich gleich sein, wenn ihre Schenkel auf gleichen Bogen stehen.

4) Ein Uebersehnenwinkel ist so groß, als der große Umkreiswinkel, abgerechnet den kleinen. Es ist (Zeich. 143) adb ein Uebersehnenwinkel (Secanten-Winkel), weil er von den beiden Uebersehnen, ad und bd, gebildet ist. Darum ist er so groß, als acb weniger cad; denn weil acb der Außenwinkel vom Dreiekk acd ist, so muss

$$\begin{array}{l} \angle acb = \angle cda + \angle dac \text{ sein,} \\ \hline \angle cda = \angle acb - \angle dac. \end{array}$$

Da nun ∠acb und ∠dac Umkreiswinkel sind, so beträgt ∠cda ½ Bogen ab weniger ½ Bogen rc.

5) Sind Umkreiswinkel in demselben oder in gleichen Kreisen gleich, so müssen auch ihre Bogen gleiche Grade haben, und man kann also von ihrer Gleichheit auf die Gleichheit ihrer Bogen schließen.

6) Will man einen rechten Winkel haben, so braucht man nur einen Umkreiswinkel zu bilden, der auf dem Durchmesser steht (§ 54). Dies geschieht am einfachsten so: Man zieht einen beliebigen Strich (Zeich. 93, bc), theilt den in 2 gleiche Theile, und setzt an den Theilungspunkt in beliebiger Lage einen gleich langen Strich (hier ad) an. Mit dem Endpunkt dieses dritten Striches verbindet man die Endpunkte des andern, und man erhält an dem Verbindungspunkt einen rechten Winkel (hier cdb). Dieser Winkel muſs ein rechter sein; denn a ist der Mittelpunkt eines zu bildenden Kreises, dessen Durchmesser bc sein muſs, worauf der Winkel cdb steht. Daſs aber der Winkelpunkt d würklich in den Umkreis fallen muſs, erhellet daraus, weil ja ab, ac und ad Strahlen von dem Mittelpunkt a aus sind. Weil man von a aus viele Strahlen bilden kann, nach der Seite wo d liegt, so kann man auch viele rechte Winkel errichten, die alle mit ihrem Winkelpunkt in den Umkreis fallen.

7) In jedem Viereck, das in einem Kreise liegt, müssen je 2 gegenüberstehende Winkel 180 Grad betragen, weil sie zusammen auf einem ganzen Kreise stehen. So beträgt Zeich. 117 ∠VBS + ∠VRS = 180 Gr.; denn erster steht auf Bogen VRS und letzter auf Bogen VBS, und beide Bogenstücke bilden den Umkreis. So auch betragen ∠RVB + ∠RSB 180 Grad.

8) Will man an einem gegebnen Punkt eines Striches einen rechten Winkel errichten, z. B. (Zeich. 93) an dem Punkt d, als dem einen Endpunkte des Striches

cd, so errichtet man über dem gegebenen Strich ein gleichschenkliges Dreiekk (hier cad), verlängert den gleichen Schenkel, der nicht an dem gegebenen Punkt liegt (hier ac) um die Schenkellänge (hier bis zu b, so daß ab gleich ist ac) und verbindet den Endpunkt dieses Striches (hier b) mit dem gegebenen Punkt (hier d), so hat man den rechten Winkel, wie schon unter 6 erörtert ward.

§. 216. Ein Strich zur Sehne gemacht. (Aufgabe.) Will man einen gegebenen Strich zur Sehne eines Kreises machen, z. B. (Zeich. 69) ra, so schlägt man von den Endpunkten (hier von r und a) aus Kreisbögen, mit gleichen aber beliebigen Strahlen über den Strich, und macht den Kreuzpunkt, hier o, zum Mittelpunkt, aus dem man den Kreis mit derselben Zirkelöffnung zieht, dessen Sehne der gegebene Strich wird.

§. 217. Nichtdurchschneidung gleichkerniger Kreise. (Erklärung.) Zwei gleichkernige (concentrische) Kreise, d. h. solche, die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben (Zeich. 125), können sich nicht schneiden, sondern ihre Umkreise müssen überall gleich weit von einander entfernt sein; und Kreise, die sich durchschneiden, können nicht denselben Kern (dasselbe Centrum) haben.

§. 218. Der Kreis durch den Durchmesser in 2 gleiche Theile getheilt. (Erklärung.) Der Durchmesser eines Kreises theilt denselben in 2 gleiche Flächen. Zeich. 36 ist der Kreis durch ab in 2 gleiche Flächen getheilt; denn ab muss sich selbst gleich sein, weil es derselbe Strich ist; es gehört aber zu beiden Flächen. Die 2 Bogen sind sich auch gleich; denn sie umspannen jeder 180 Grad, und sind von derselben Weite, weil sie mit demselben Strahl gemacht sind. Legt man darum beide Flächen über einander, so muss der Durchmesser sich selbst und der eine Bogen den andern dekken.

§. 219. Theilung der Kreisfläche in vier gleiche Theile. (Erklärung.) Zwei Durchmesser, welche sich in rechten Winkeln durchschneiden, theilen eine Kreisfläche in 4 gleichgroße sich dekkende Stükke.

§. 220. Wechselbestimmung von Winkeln, Bogen und Sehnen. (Erklärung.) Winkel am Mittelpunkt (Kernwinkel, Centralwinkel), ihre Bogen und deren Sehnen stehen in der innigsten Verbindung in denselben oder in gleichen Kreisen, so dass das eine durch das andre bestimmt wird. Vom Bogen ist die Sehne und der Winkel abhängig, und umgekehrt. Wird eins größer oder kleiner, so kann das andre nicht so bleiben, wie es war, sondern muss auch größer oder kleiner werden.

§. 221. Der Strich, der winkelrecht die Sehne in 2 gleiche Theile theilt, hälftet auch den Bogen und geht durch den Mittelpunkt. (Lehrsatz.) Wird durch einen winkelrechten Strich eine Sehne eines Kreises in 2 gleiche Theile getheilt, so muss bei der Verlängerung:

a) auch der dazu gehörige Bogen in 2 gleiche Theile getheilt werden;
b) der Theilungsstrich durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

Es ist, Zeich. 94, auf die Sehne bd so der Strich ac gezogen, dass bd in 2 gleiche Theile getheilt ist, oder dass bu = ist ud, und dass au auf bd winkelrecht steht, oder dass ∠ i = ist ∠ r; so muss auch der Bogen bc gleich sein dem Bogen cd. Denn weil:

$$\angle i = \angle r$$
$$ub = ud$$
$$ua = ua$$
$$\overline{\triangle\, bau \cong dau}$$
$$\overline{\angle v = \angle s}$$

Bogen bc = dc (§. 215, 5).

Es muss aber auch a c durch den Mittelpunkt gehen;
denn nicht nur b c = c d, sondern auch Bogen
b a = a d, wegen der Gleichheit
der Sehnen a b und a d, oder wegen der Gleichheit der
Winkel b und d. Mithin müssen
Bogen a b + b c = Bogen a d + d c sein.
Es ist also der Kreis durch den Strich a c in 2 gleiche Theile getheilt; solche Theilung kann nur der Durchmesser machen, und der Durchmesser muss durch den Mittelpunkt gehen.

§. 222. Wie man den Mittelpunkt eines Kreises findet. (Aufgabe.) Will man den Mittelpunkt in einem Kreise oder von einem Kreisbogen haben, so braucht man nur 2 beliebige Sehnen zu ziehen, diese durch winkelrecht darauf errichtete Striche in 2 gleiche Theile zu theilen, und die Theilungsstriche so weit zu verlängern, bis sie sich berühren oder durchschneiden. Der Berührungspunkt muss der Mittelspunkt sein; z. B. (Zeich 95) soll zu dem gegebenen Kreis der Mittelpunkt gesucht werden. Man zieht die willkührlichen Sehnen a c und a b, theilt sie in gleiche Theile durch winkelrecht errichtete Theilungsstriche, so muss der Durchschnittspunkt beider, hier o, der Mittelpunkt sein; denn es muss ja der Mittelpunkt in beide Theilungsstriche fallen, da beide auf Sehnen senkrecht errichtet sind, und beide die Sehnen nebst den Bogen in gleiche Theile theilen. Soll aber der Mittelpunkt in beide Theilungsstriche fallen, so muss er nothwendig in deren Durchschnittspunkt fallen.

§. 223. Wie man zu 3 Punkten den Mittelpunkt findet. (Aufgabe.) Will man zu 3 beliebigen Punkten, z. B. zu den Punkten a b c (Zeich. 95), den Mittelpunkt, d. h. den Punkt suchen, von dem aus ein Umkreis gezogen werden kann, der durch die 3 gegebenen Punkte geht; so verbindet man die Punkte durch Striche (hier c a und a b), welche Sehnen sind von dem

zu bildenden Kreise, theilt diese in gleiche Theile durch winkelrechte, darauf gezogene Striche, und erhält den Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkt beider, hier in o. Von selbst erhellet daraus, wie es möglich ist, um jedes gegebene Dreiekk so einen Kreis zu beschreiben, daſs alle Ekken in den Umkreis fallen.

§. 224. Ein Strich, winkelrecht vom Mittelpunkt auf eine Sehne gezogen, theilt dieselbe in 2 gleiche Theile. (Lehrsatz.) Zieht man von dem Mittelpunkt eines Kreises einen Strich winkelrecht auf eine Sehne, so wird sie mit ihrem Bogen dadurch in 2 gleiche Theile getheilt. — — Es ist (Zeich. 96) von o aus os winkelrecht auf ra gezogen, und es sollen nun ru und ua gleich sein. Zum Beweis zieht man die Strahlen or und oa;

$$or = oa$$
$$on = on$$
$$\angle u = \angle e$$
$$\overline{\triangle rno \cong \triangle ona}$$
$$\overline{rn = na}$$
$$\overline{rs = sa.}$$

§. 225. Theilung der Winkel in einem regelmäßigen Vielekk. (Lehrsatz). Die Winkel eines regelmäßigen Vielekkes werden durch Striche, die aus dem Winkelpunkt in den Mittelpunkt gezogen, und also Strahlen des Kreises sind, der sich um das Vielekk beschreiben läſst, in 2 gleiche Theile getheilt.

Es ist (Zeich. 68) der Winkel rst durch den Strich so getheilt, so muſs $\angle v = \angle x$ sein; denn:

$$ro = ot \text{ (Strahlen)}$$
$$rs = st \text{ (regelmäßiges Sechsekk)}$$
$$os = os$$
$$\overline{\triangle ros \cong tos}$$
$$\overline{\angle v = \angle x}$$

Hieraus folgt von selbst, daß jedes regelmäßige Vieleck durch Strahlen, die aus den Winkelpunkten gezogen sind, in lauter sich dekkende gleichschenklige Dreiekke verwandelt wird.

§. 226. **Begründete Bildung von regelmäßigen und halb-regelmäßigen Vielekken.** (Erklärung.) Man kann alle gradstrichigen, regelmäßigen und halbregelmäßigen Flächen in Kreisen bilden, indem man ihre Seiten als Sehnen betrachtet. Die Sehnen erhält man durch Eintheilung der Kreisbogen. Will man z. B. ein Geviert, so misst man am Umkreise, vermittelst des Gradbogens (Transporteurs), 90 Grad ab, trägt die 4 Mal in dem Umkreis herum, und zieht für die 4 gleichen Bogenstükke die 4 gleichen Sehnen, welche Seiten des Gevierts sind. Folgende Uebersicht gibt die Winkel für mehrere regelmäßige Vielekke an.

Ein Bogen oder ein Winkel von $\frac{360}{3}^\circ = 120$ Grad gibt die Sehne für ein gleichseitiges Dreiekk.

$<\frac{360}{4}^\circ = 90^\circ$	gibt die Sehne für ein Geviert.				
$<\frac{360}{5}^\circ = 72^\circ$	—	—	—	regelmäß. Fünfekk.	
$<\frac{360}{6}^\circ = 60^\circ$	—	—	—	—	Sechsekk.
$<\frac{360}{7}^\circ = 51\frac{3}{7}^\circ$	—	—	—	—	Siebenekk.
$<\frac{360}{8}^\circ = 45^\circ$	—	—	—	—	Achtekk.
$<\frac{360}{9}^\circ = 40^\circ$	—	—	—	—	Neunekk.
$<\frac{360}{10} = 36^\circ$	—	—	—	—	Zehnekk.
$<\frac{360}{12} = 30^\circ$	—	—	—	—	Zwölfekk.
$<\frac{360}{15} = 24^\circ$	—	—	—	—	Funfzehnekk.
$<\frac{360}{18} = 20^\circ$	—	—	—	—	Achtzehnekk.
$<\frac{360}{24} = 15^\circ$	—	—	—	—	Vierundzwanzigekk.
$<\frac{360}{30} = 12^\circ$	—	—	—	—	Dreißigekk.
$<\frac{360}{40} = 9^\circ$	—	—	—	—	Vierzigekk.
$<\frac{360}{50} = 7\frac{1}{5}^\circ$	—	—	—	—	Funfzigekk.
$<\frac{360}{100} = 3\frac{6}{10}^\circ$	—	—	—	—	Hunderteck.

Auch halbregelmäßige Vielekke lassen sich leicht durch den Kreis bilden. Will man z. B. ein Achtekk haben, dessen Winkel gleich sind, dessen an einander liegenden Seiten aber wechseln, so nimmt man abwechselnd Bogen von 60 und 30 Grad. Eben so geben Bogen von 90 und von 30 Graden ein halbregelmäßiges Sechsekk.

§. 227. Betrag der Winkel in regelmäßigen Vielekken. (Folgerung.) Da in einem Dreiekk alle Winkel 180 Grad betragen, in den Dreiekken eines regelmäßigen Vielekkes alle Winkel an dem Umfang sich gleich und durch die Strahlen gleich getheilt sind, und die Winkel an dem Mittelpunkt zusammen 360 Grad betragen, so lassen sich auch die Winkel von den regelmäßigen Vielekken leicht berechnen; man braucht nämlich von 180 Grad nur den Winkel am Mittelpunkt abzuziehen. Es betragen also die Winkel:

am regelmäßigen	Fünfekk	180 — 72 = 108	Gr.
— —	Sechsekk	180 — 60 = 120	—
— —	Siebenekk	180 — $51\frac{3}{7}$ = $128\frac{4}{7}$	—
— —	Achtekk	180 — 45 = 135	—

u. s. w.

§. 228. Wie man ein regelmäßiges Vielekk umkreiset. (Aufgabe.) Will man um ein regelmäßiges Vielekk einen Kreis beschreiben, so theilt man zwei Winkel desselben in gleiche Theile, und wo sich die beiden Theilungsstriche durchschneiden, da ist der Mittelpunkt des Kreises, und die Strichtheile vom Mittelpunkt bis zum Winkelpunkt sind Strahlen des Kreises. — Um jedes regelmäßige Vielekk läßt sich ein Kreis beschreiben; denn jedes läßt sich in gleichschenklige sich dekkende Dreiekke, die um einen Punkt liegen, zerlegen, deren gleiche Schenkel Strahlen sind.

§. 229. Berechnung der Winkel in einem unregelmäßigen Vielekk. (Folgerung.) In jedem gradstrichigen Vielekk, das sich in Dreiekke zerlegen

läſſt, die ſich mit einer ihrer Spitzen alle in einem Punkt vereinigen (ſ. Zeich. 97), läſſt ſich die Summe aller Umfangswinkel leicht heraus bringen, indem man die Summe der Seiten mit 180 Grad (im vorſtehenden Fall 8 × 180 = 1440) vervielfältigt und 360 Grad davon abzieht (hier 1440 — 360 = 1080), oder, noch kürzer, indem man die Anzahl der Seiten, abgerechnet 2, mit 180 vervielfältigt (hier alſo 8 —2 × 180 = 6 × 180 = 1080 Grad).

§. 230. Gleichheit von Kreisabſchnitten. (Erklärung.) Sind in demſelben oder in gleichen Kreiſen Sehnen und Bogen ſich gleich, ſo müſſen auch die davon eingeſchloſſenen Kreis-Abſchnitte ſich gleich ſein. Es ſind (Zeich. 126) alle graden Striche gleich, und alle Bogen gleich und Bogen von gleichen Kreiſen, die mit einer Sehne gemacht ſind, ſo müſſen alle 10 einzelnen Kreisabſchnitte unter einander, und je zwei je zweien gleich ſein. Das gleichſeitige Dreiekk aön hat demnach auch gleichen Inhalt mit dem halb krummſtrichigen Dreiekk äsoura, weil der Abſchnitt aso gleich iſt dem Abſchnitt arü.

§. 231. Lage des Punktes, in dem ſich 2 Kreiſe berühren. (Lehrſatz.) Wenn 2 Kreiſe ſich innerlich oder äußerlich berühren, ſo liegt der Berührungspunkt mit den beiden Mittelpunkten in einer Richtung. — Die beiden Kreiſe (Zeich. 130), die von a und b aus gezogen ſind, berühren ſich äußerlich in x, und die beiden Kreiſe (Zeich. 131), die ebenfalls von a und b aus gezogen ſind, berühren ſich innerlich in x. Es wird nun behauptet, daſs in beiden Fällen, bei einer äußerlichen, wie bei einer innerlichen Berührung, der Berührungspunkt x (130 und 131) in einer Richtung mit den beiden Mittelpunkten a und b falle. Der Beweis iſt folgender: Da, wo 2 Kreiſe ſich berühren, ſind ſie ſich am nächſten; denn es iſt kein anderer Raum

mehr zwischen ihnen; sind sie sich am nächsten da, so müssen auch die Strahlen, die überall vom Mittelpunkt zum Umkreis gezogen werden, hier den nächsten Weg zu einander nehmen; das aber ist die grade Richtung. Es wird also der Strahl x a mit dem Strahl x b in dieselbe Richtung fallen. Läge der Berührungspunkt nicht in grader Richtung mit den Mittelpunkten, so läge er an einer Stelle, wo die Kreise sich nicht am nächsten wären, indem er mit beiden Mittelpunkten einen Winkel bildete, was dem Begriff eines Berührungspunktes entgegen ist.

§. 232. Folgerungen aus §. 231.

1) Kann man den Berührungspunkt zweier Kreise nicht gut sehen, so zieht man einen Strich von dem einen Mittelpunkt zum andern, der entweder von selbst, oder (bei innerlichen Berührungen) in der Verlängerung durch die Umkreise geht. Die Stelle, an der die Kreise durchschnitten werden, ist ganz genau der Berührungspunkt.

2) Zwei Kreise können sich nur in einem Punkt berühren, weil es unmöglich ist, daſs 2 Punkte des Umkreises zugleich in einer Richtung mit den Mittelpunkten stehen, oder weil es unmöglich ist, daſs 2 Kreise an 2 Stellen sich am nächsten sind.

§. 233. Der Streifstrich am Kreise, (Erklärung.) Der Streifstrich (die Tangente) kann einen Kreis nur in einem einzigen Punkt berühren; denn wäre es möglich in 2 Punkten, so müſsten 2 Punkte im Umkreise zu einander in der Richtung von graden Strichen liegen. Nur wenn ein grader Strich als eine Uebersehne (eine Secante) die Kreisfläche durchschneidet, berühren sich 2 Punkte des graden Striches mit 2 Punkten des Umkreises; aber ein Streifstrich durchschneidet nicht den Kreis.

§. 234. Der Strahl rechtwinklig auf dem Streifstrich. (Lehrsatz.) Zieht man auf den Berührungspunkt des Streifstriches einen Strahl, so steht der rechtwinklig auf dem Streifstriche. — Es ist, Zeich. 144, der Strahl c d auf den Berührungspunkt des Streifstriches b a gezogen, so muss ∠ cda = ∠ cdb sein; denn der nächste Weg von dem Mittelpunkt zum Streifstrich kann kein anderer sein, als der, welcher zum Berührungspunkt führt, weil in diesem der Streifstrich dem Mittelpunkt am nächsten ist; und von jedem Punkt zu irgend einem graden Strich ist der nächste Weg der, welcher 2 rechte Winkel bildet. Es folgt hieraus, dass der Strahl, der winkelrecht auf dem Streifstrich steht, durch den Berührungspunkt geht.

§. 235. Die Winkel im und am Kreisabschnitt betragen 180 Grad. (Lehrsatz.) Der Winkel im Kreisabschnitt macht mit dem am Kreisabschnitt 180 Grad aus. — Es ist, Zeich. 144, xmv ein Kreisabschnitt, xmv ein Winkel im, und xvr ein Winkel am Abschnitt, beide müssen 180 Grad betragen.

Zum Beweise ziehe man von v aus den Durchmesser vz und verbinde z mit x, so muss

∠ n = 90 Gr. sein (er steht auf dem Durchmesser)

∠ o + ∠ s = 90 Gr.

∠ s + ∠ xvr = 90 Gr. (weil cv als Strahl winkelrecht auf dem Streifstrich rk steht)

∠ o + ∠ s = ∠ s + ∠ xvr

∠ o = ∠ xvr

∠ xmv + ∠ o = 180 Gr. (beide zusammen stehen auf dem ganzen Kreis)

∠ xmv + ∠ xvr = 180 Gr.

§. 236. Folgerungen aus §. 235.

1) Der Winkel im Abschnitt ist gleich dem entgegengesetzter Winkel am Abschnitt. — Es muss also (Zeichnung 144):

$\angle$ x v k = $\angle$ x m v sein; denn:

x m v + x v r = 180 Gr.
x v k + x v r = 180 Gr.

x m v = x v k.

Dass auch m v r = m x v ist, leuchtet von selbst ein.

2) Will man in einem Kreise ein Dreiekk von gegebenen Winkeln errichten, so zieht man einen Streifstrich (Zeich. 144, r k), trägt die gegebenen Winkel neben einander an den Streifpunkt, hier die Winkel x v r, z v x und k v z an v, und verbindet die beiden Schenkel, die den Umkreis berühren, hier durch x z, so muss das dadurch entstehende Dreiekk, hier x v z, das geforderte sein; denn 1) der Winkel z v x ist darin, und 2) $\angle$ x v r = $\angle$ x z v, weil x v r + x m v sowohl 180 Gr. betragen, als x z v + x m v; eben so ist $\angle$ z v k = $\angle$ z x v, weil Gleiches von Gleichem abgezogen Gleiches zurücklässt.

Anweisung. Bei dem ersten Theil dieser Uebung kommt es sehr darauf an, wie weit die Schüler im Rechnen sind. Haben sie darin schon etwas Fertigkeit, so kann man große Flächen zur Uebung ausmessen und berechnen lassen. Sind die Schüler aber noch im Rechnen zurükk, so hält man sich zu kleinen Zahlen; denn zu eigentlichen Rechenübungen kann man die Messübungen nicht machen. Dagegen darf es an vielen Aufgaben nicht fehlen. Es müssen namentlich die Rauten, Schrägrauten und alle Dreiekke recht fleißig in allen Stellungen, nicht nur auf dem Papier, sondern auch in dem Zimmer und im Freien gemessen werden, wobei die Ausstekkung dieser Flächen im Freien eine recht gute Uebung ist. Der Lehrer muss einige Mal, je öfter, desto besser, ins Freie gehen, namentlich, wenn die vielen Anwendungen von den Dekkungen der Dreiekke vorkommen. Es ist

freilich möglich, auch auf Höfen und in Zimmern manche Messung vorzunehmen, zumal wenn man Stäbe mit Standfüßen hat, die man überall hinstellen kann; doch kann man das freie Feld nicht ganz entbehren. Dass diesen Ausmessübungen auch wieder Abschätzübungen vorangehen können, darf ich wohl nicht noch erst sagen. — Da auf dem Felde so oft ein rechter Winkel anzutragen ist, so thut man wohl, wenn man sich eine Schnur hält, die in 3, 4, 5 Theile getheilt ist, um damit durch 3 Stäbe, welche an die Knoten und Enden gestekkt werden, den rechten Winkel zu errichten. — Wie die einzelnen Lehren und Aufgaben zu behandeln sind, darüber sage ich weiter nichts, weil ich es für überflüssig halte. Nur über zwei kleine Hülfsmittel noch ein Paar Worte:

1) Bei der Verdeutlichung, dass die Rauten und Schrägrauten sich in Rechtekke verwandeln lassen (§. 160), bediene man sich der Flächen aus Pappe, die man leicht durchschneiden kann; eben so ist es gut bei der Verdeutlichung des Satzes (§. 162), dass jedes Dreiekk die Hälfte von einem regelmäßigen Vierekk ist, mit dem es gleichen Grund und gleiche Höhe hat.

2) Bei den Dreiekksgleichungen bediene man sich verschiebbarer Dreiekke, nämlich 3 Stäbchen, die an 2 Stellen durch Rieten befestigt sind, aber sich an diesen Punkten schieben lassen.

Dritte Uebung.

Das Messen und Vergleichen der Körper.

I. Messung der Körper von ebenen Flächen.

§. 237. **Körpermaaße.** (Erklärung.) Wie Striche durch Striche, Flächen durch Flächen gemessen werden, so Körper durch Körper. Das Grundkörpermaaß ist darum der Würfel, weil bei ihm Alles rechtwinklig ist, und die Länge, Breite und Höhe (Dikke) sich gleich sind. Er kommt vor als Würfel- (Kubik-) Ruthe, -Fuß -Zoll und Strich. Bei Ausmessung von Weltkörpern bedient man sich der Würfel- (Kubik-) Mei-

len. Ein Würfelfuß ist ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe einen Fuß beträgt. Wollte man einen Würfelfuß in Würfelzolle zerlegen, so müsste man zuerst, bei 10theiligem Maaße, den Würfel in 10 gleiche Tafeln zerschneiden, dann jede Tafel in 10 gleiche Vierkante theilen, und zuletzt jedes Vierkant in 10 gleiche Theile zerstükkeln, wovon jeder Theil einen Würfel bildet. Es hat demnach ein Würfelfuß $10 \times 10 \times 10 = 1000$, oder, nach zwölftheiligem Maaße gerechnet, $12 \times 12 \times 12 = 1728$ Würfel-Zoll. Gleicherweise hat der Würfel-Zoll 1000 oder 1728 Würfel-Striche, und die Würfel-Ruthe 1000 oder 1728 Würfelfuß. Für mehrere Gegenstände bedient man sich wohl andrer Maaße als des Kubikmaaßes; es können aber auch alle Körpermaaße auf das Kubikmaaß zurükkgeführt werden. Man bezeichnet das Kubik- oder Würfelmaaß also:

$\square\square^{\circ}$ = Würfelruthe; $\square\square'$ = Würfelfuß; $\square\square''$ = Würfelzoll; $\square\square'''$ = Würfelstrich.

238. Eine halbregelmäßige Tafel. (Erklärung.) Eine halbregelmäßige Tafel, deren Kanten alle rechte Kanten sind, wird leicht ausgemessen, indem man alle 3 messbaren Richtungen, Länge, Breite und Höhe mit einem Längenmaaßstabe ausmisst, und die 3 gefundenen Zahlen mit einander vervielfältigt. Es soll z. B. die Tafel gemessen werden, wozu Zeich. 70 das Netz liefert. Angenommen sie ist 6 Zoll lang, 4 Zoll breit und 2 Zoll hoch, so beträgt sie 48 $\square\square''$, oder 48 einzelne Würfel, wovon jeder einen Zoll lang, breit und hoch ist. Von diesen Zollwürfeln liegen 24 oben und 24 unten. Von den untern liegen 16 nach Außen, 8 im Innern. Hätte man eine Tafel, die 6″ lang, 4″ breit und $1\frac{1}{2}$″ dikk wäre, so würde der körperliche Inhalt dieser Tafel $\frac{1}{4}$ weniger betragen als der von der vorigen.

§. 239. Die regelmäßige vierseitige Säule und der Würfel. (Erklärung.) Bei einer

regelmäßigen vierseitigen Säule ist die Berechnung noch einfacher; denn da beim Grunde Länge und Breite gleich sind, so hat man nur eine Richtung zu messen, um den Geviertinhalt der Grundfläche zu bekommen. Will man den Würfelinhalt des ganzen Körpers haben, so misst man die Höhe und vervielfältigt den Betrag mit dem Geviertinhalt der Grundfläche. Legt man die regelmäßige vierseitige Säule, statt sie zu stellen, so muss dasselbe herauskommen. Dies gilt auch von der vorher ausgemessenen Tafel, welche drei verschiedene Lagen haben kann. Beim Würfel fallen alle 3 Richtungen der Ausdehnung nach zusammen. Man braucht also nur eine einzige Richtung zu messen; beträgt diese z. B. 6 Zoll, so muss der Würfelinhalt des Würfels 6×6×6″=216 □□″ betragen.

§. 240. Die regelmäßige dreiseitige Säule. (Erklärung.) Die regelmäßige dreiseitige Säule wird auf folgende Art gemessen und berechnet: Man ermittelt zuerst den Geviert-Inhalt des Grund-Dreiekkes, wie dies §. 162 angegeben ist; darauf misst man die Höhe der Säule und vervielfältigt deren Betrag mit dem Geviertinhalt der Grundfläche, um so den Würfel-Inhalt zu erhalten. Sollte aber die dreiseitige Säule auf einer Seitenfläche liegen, so misst und berechnet man zuerst das Grund-Rechtekk, und vervielfältigt den Betrag mit der Hälfte der Höhe, d. h. der Richtung, die von der obern Kante rechtwinklig auf die Grundfläche geht. Jede andere dreiseitige Säule lässt sich, wenn sie beim Stehen genau senkrecht ist, auf die Art, wie die regelmäßige messen.

§. 241. Die übrigen Säulen, deren Seitenflächen winkelrecht zum Grunde stehen. (Erklärung.) Alle Säulen, sie mögen regelmäßige oder unregelmäßige Grund- und Höhenflächen haben, wenn sie nur oben und unten gleich dikk sind und genau senk-

recht stehen, lassen sich berechnen, durch Vervielfältigung der Höhe mit dem Geviert-Inhalt der obern oder der untern Fläche (was ja gleich ist). Selbst die Walze, oder die Rundsäule wird so berechnet. Wie aber die Grundfläche der Rundsäule zu berechnen sei, ist §. 165 vorgekommen. Will man den Geviert-Inhalt von ihr haben, so misst man den Durchmesser des Kreises vom Grunde, errechnet daraus den Umkreis, macht diesen zum Grunde, und die Höhe der Rundsäule zur Höhe der Seitenfläche, vervielfältigt beides mit einander, und muss in dem Ergebniss den Geviert-Inhalt der Seitenfläche von der Rundsäule haben. Am einleuchtendsten wird dies aus dem Netz zur Rundsäule. (Zeich. 6.)

§. 242. Säulen, die schräg stehen. (Erklärung.) Schwieriger ist die Messung solcher Säulen, deren Seitenflächen nicht rechtwinklig, sondern schräg zu der Grund- und Höhenfläche liegen. Man hat an diesen Körpern die Höhe nicht rechtwinklig gegeben, darum muss man sie sich erst suchen, entweder durch ein Senkloth oder durch andere Mittel. Nämlich die wahre Höhe von schräg stehenden Körpern ist der Strich, welcher sich von einem Theile der obern Fläche, oder einer Kante oder Ekke rechtwinklig auf den Grund oder dessen erweiterte Ausdehnung (wenn das erste nicht gehen sollte) ziehen lässt. Denken wir uns z. B. (Zeich. 71) a b c d als eine schräg stehende Säule, so würde nicht a c und b d, sondern a d und i e die Höhe sein, wovon letztere auf die erweiterte Grundfläche gezogen ist. Ist die Höhe gefunden, so verfährt man eben so, wie bei den regelmäßigen Säulen, indem man den Betrag des Grundes mit der Höhe vervielfältigt. Es müssen nämlich, wie alle regelmäßigen Vierekke von gleichem Grund und gleicher Höhe, so auch alle Säulen von gleichem Grund und gleicher Höhe sich gleich sein (s. §. 252).

§. 243. Rautenflache. (Erklärung.) Es gibt 2 Körper, die, gleich dem Würfel, Sechsflache sind, aber statt der Gevierte Rauten haben, man nennt sie verschobene Würfel, Rautensechsflache, oder kurz Rautenflache, nämlich (Zeich. 87, das Netz) ein Rautensechsflach mit einer langen Axe, und (Zeich. 88, das Netz) ein anderes mit einer kurzen Axe. Beide Körper bilden unter sich einen Gegensatz, der zweite ist gleichsam ein an zwei entgegengesetzten Ekken zusammengedrükkter, und der erste ein an zwei entgegengesetzten Ekken ausgezogener Würfel. Der zweite hat an den Enden der kurzen Axe lauter stumpfe Winkel, der erste an den Enden der langen Axe lauter spitze Winkel. Beide Körper sind zu betrachten und auszumessen, wie schräg stehende vierseitige Säulen.

§. 244. Zerschneidung eines Würfels in 3 gleiche vierseitige Spitzsäulen. (Anschauung.) Stellt man einen Würfel auf einer Ekke, so hat man 3 Flächen und 3 Kanten oben, und 3 Flächen und 3 Kanten unten. Zerschneidet man in dieser Lage denselben, so dass man drei Schnitte macht durch die herunter laufenden Geeren der obern Flächen und die untern Kanten, und diese Schnitte treibt bis zur Berührung aller dreier, welche in der Axe stattfindet, die (bei der erwähnten Haltung des Körpers) von der obern zur untern Ekke sich befindet, so hat man den Würfel in 3 gleiche Stükke zerschnitten. Oder, kann man das Schneiden nicht so leicht machen, und setzt drei ganz gleiche Körper, deren Netz Zeich. 89 gegeben ist, mit ihren hervortretendsten Ekken zusammen, so erhält man einen Würfel, den man in die 3 erwähnten Körper wieder zerlegen kann. Setzt man diese Stükke auf die Geviertflächen, die jedes Stükk hat, so bilden sie alle drei unregelmäßige vierseitige Spitzsäulen, deren Grund dem Grunde des Würfels, und deren Höhe der Höhe des Würfels

gleich ist; denn an jeder vierseitigen Spitzsäule findet man eine Würfelkante, die winkelrecht auf dem Grunde steht, und also die wahre Höhe der Spitzsäule ist. Eine vierseitige Spitzsäule, welche gleichen Grund und gleiche Höhe mit einem Würfel hat, muss $\frac{1}{3}$ so viel leiblichen Inhalt haben, als der Würfel. Da nun der Würfel auch zu den vierseitigen Säulen gerechnet werden kann, so wird es wahrscheinlich, dass jede vierseitige Spitzsäule $\frac{1}{3}$ von einer vierseitigen Säule beträgt, mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe hat. Und weil, nach §. 238—243, im Wesentlichen die Berechnung aller Säulen übereinstimmt, so kommt man auch wohl auf die Muthmaßung, dass jede Spitzsäule $\frac{1}{3}$ von einer Säule sei, mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe hat.

§. 245. Zerfällung der dreiseitigen Säule in drei gleiche dreiseitige Spitzsäulen. (Anschauung.) Nimmt man eine dreiseitige Säule und durchschneidet sie nach den Geeren der Seitenflächen, vermittelst zweier Schnitte, in drei Stükke, so erhält man drei Spitzsäulen, von denen Zeich. 90 unten a, b, c die Netze angegeben sind. Dass die Spitzsäulen a und b gleichen Grund und gleiche Höhe mit den dreiseitigen Säulen haben, woraus sie genommen sind, sieht man sogleich, wie auch, dass sie sich gleich und ähnlich sind. Anders ist es mit dem unförmlichen Körper c. Legt man diesen aber so, dass eine der alten, hier nur zur Hälfte vorhandenen, Seitenflächen der Säule der Grund wird, und legt man gleichfalls eine von den Spitzsäulen a oder b in der Art, dass sie ebenfalls eine von den halben Seitenflächen der Säule zum Grunde hat; so sieht man, dass a oder b außer dem gleichen Grunde, auch gleiche Höhe mit c haben, wovon freilich die bei c erst künstlich gebildet werden muss, weil ihre Richtung außerhalb des Körpers fällt. Da nun Spitzsäulen von

gleichem Grund und gleicher Höhe gleichen Inhalt haben müssen, so ist das hier bei a, b und c auch der Fall. Dem Inhalte nach hat man demnach, statt der Körper a, b, c, drei Körper wie a oder wie b. Daraus erhellet denn, dass man eine dreiseitige Säule in drei gleiche dreiseitige Spitzsäulen verwandeln kann, wovon jede $\frac{1}{3}$ jener Säule ist, mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe haben. Es ist demnach auch umgekehrt jede dreiseitige Spitzsäule $\frac{1}{3}$ von einer dreiseitigen Säule mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe hat. Daraus ergibt sich die Berechnung einer dreiseitigen Spitzsäule. Man vervielfältigt nämlich Grund und Höhe mit einander und nimmt davon $\frac{1}{3}$, oder man vervielfältigt den Grund mit $\frac{1}{3}$ der Höhe, oder die Höhe mit $\frac{1}{3}$ des Grundes.

§. 246. Jede Spitzsäule $\frac{1}{3}$ einer Säule von gleicher Höhe und gleichem Grunde. (Erweiterung.) Da sich alle vier- und vielkantige Säulen in dreikantige theilen lassen, so gilt das Gefundene von allen Spitzsäulen und auch vom Kegel; sie sind $\frac{1}{3}$ von solchen Säulen, mit denen sie gleichen Grund und gleiche Höhe haben, und lassen sich darum alle leicht ausmessen und berechnen. Nur die Höhe ist nicht bei allen so leicht zu finden, selbst nicht bei den grade stehenden, weil sie im Mitten des Körpers liegt. Bei schrägen Körpern ist sie oft leichter zu messen, da sie mehr außerhalb des Körpers fällt. Der körperliche Inhalt jeder Spitzsäule wird also gefunden, wenn man zuerst seinen Grund ausmisst, und diesen mit $\frac{1}{3}$ seiner Höhe vervielfältigt. — Hat man eine Spitzsäule mit abgeschnittenem Obertheil, so muss man dieselbe erst so messen, als sei sie nicht abgeschnitten, darauf das abgeschnittene Stükk ausmessen, und letzteres vom ersten abziehen. Soll bei einem Kegel der Geviertinhalt der Seitenfläche ermittelt

werden, so misst man zuerst den Durchmesser des Grundes vom Kegel, errechnet daraus den Umfang, nimmt die Hälfte davon zum Grunde und vervielfältigt diesen mit dem Betrag eines Striches, der von der Kegelspitze auf den Umkreis des Grundes in nächster Richtung gezogen ist (vergl. §. 162 und §. 163). Am anschaulichsten wird dies durch das Kegelnetz (Zeich. 12).

§. 247. Das Vierflach. (Folgerung.) Da ein Vierflach zugleich eine dreiseitige Spitzsäule ist, so kann es auch so, wie alle Spitzsäulen gemessen und berechnet werden.

§. 248. Alle regelmäßigen und halbregelmäßigen Flache. (Erklärung.) Von allen regelmäßigen Flachen, als dem Achtflach, dem fünfekkigen Zwölfflach und dem Zwanzigflach erhält man den Würfelinhalt, wenn man den Flächeninhalt mit $\frac{1}{6}$ der Flächenaxe vervielfältigt; denn die Flache lassen sich in so viele Spitzsäulen zerlegen, als sie Außenflächen haben. Diese Außenflächen werden die Grundflächen der Spitzsäulen, deren Höhe die Hälfte der Flächenaxe beträgt. Da alle die Spitzsäulen, in welche sich ein regelmäßiges Flach zerlegen lässt, ganz gleich und ähnlich sein müssen; so hat man nicht nöthig, alle zu messen und zu berechnen, sondern eins ist hinlänglich. Den Würfelinhalt davon nimmt man so oft, als Außenflächen da sind, und man hat nothwendig den Würfelinhalt des ganzen Körpers. Alle die ganz- und halb-regelmäßigen Körper, welche §. 93 bis §. 111 vorkommen, lassen sich auf ähnliche Weise messen und berechnen. So viele besondere Flächenaxen sie haben, oder so viele abweichende Außenflächen sie besitzen, so viele besondere Spitzsäulen müssen gemessen und berechnet werden. Die Flächenaxen misst man leicht, indem man in die Mitten zweier gleichlaufender Flächen die Spitzen eines Zirkels mit gebogenen

Schenkeln setzt. Am besten lässt sich auch so die Höhe der einzelnen Spitze messen.*)

II. Körperliche Gleichungen.

§. 249. Gleichheit und Aehnlichkeit bei Körpern. (Erklärung.) Sollen Körper sich einander gleich und ähnlich sein, so müssen sich alle einzelnen Theile derselben genau dekken. Keine Säule kann einer Spitzsäule, keine Säule und keine Spitzsäule einem Flach gleich und ähnlich sein; denn sie haben ungleiche Formen. Nur die Körper sind gleich und ähnlich, die bei Gleichheit der Formen gleiche Größe, und bei Gleichheit der Größe gleiche Formen haben.

Zwei Spitzsäulen, zwei Säulen und zwei Flache können nur dann einander gleich und ähnlich sein, wenn sie gleich viele, gleich große und gleich liegende Flächen, Kanten, Ekken und Winkel haben.

§. 250. Gleichheit und Aehnlichkeit bei regelmäßigen Säulen und Spitzsäulen. (Erklärung.) Zwei ganz regelmäßige, also winkelrecht stehende, drei=, vier= u. s. w. seitige Säulen, wie auch die Rundsäulen, sind sich einander gleich und ähnlich, wenn ihre Höhen ganz gleich und ihre Grundflächen gleich und ähnlich sind.

Zwei ganz regelmäßige (also winkelrecht stehende) drei=, vier= u. s. w. seitige Spitzsäulen, wie auch die Kegel sind sich unter denselben Bedingungen gleich.

§. 251. Gleichheit und Aehnlichkeit bei der Kugel und bei regelmäßigen Flachen.

---

*) Erlaubt es die Zeit, so kann der Lehrer hier alle Größen=Verhältnisse zwischen den eingeschriebenen und umschriebenen Körpern durch Messungen und Berechnungen ermitteln lassen; freilich eine nicht so ganz leichte Aufgabe. Auch die Messungen der körperlichen Winkel, oder der Kanten, wozu ein eigner Kantenmesser (Gonyometer) gehört, lässt sich hieran anschließen.

(Erklärung.) Alle Kugeln sind sich gleich und ähnlich, deren größte Kreise (solche, nach deren Durchschneidung sie in zwei gleiche Theile zerfallen), oder deren Axen, oder deren Strahlen sich gleich sind.

Alle regelmäßigen Flache sind schon für gleich und ähnlich zu halten, sobald nur eine Außenfläche an dem einen Flach genau einer an dem andern Flach gleich und ähnlich ist; denn aus der Regelmäßigkeit ergibt sich schon, daſs auch dies bei den andern Flächen der Fall sein muß.

§. 252. Räumliche Gleichheit, bedingt durch Grund und Höhe. (Erklärung.) Alle Säulen sind sich, dem Würfelinhalt nach, gleich, wenn sie inhaltlich gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben (siehe §. 242). Dasselbe gilt von allen Spitzsäulen (s. §. 245). Darum ist es leicht, eine vierseitige Säule zu machen, die mit einer gegebnen dreiseitigen gleichen Würfelinhalt hat, oder eine vierseitige Spitzsäule, die mit einem gegebnen Kegel von gleichem Inhalt ist.

§. 253. Gleichräumige Körper bei ungleicher Form. (Aufgabe.)

1) Man kann eine Spitzsäule bilden, die gleichen Inhalt mit einer gegebnen Säule hat, wenn man den Grund oder die Höhe derselben verdreifacht.

2) Man kann eine Säule bilden, die mit einem gegebnen Flach gleichen Inhalt hat, wenn man den Flächeninhalt aller Außenflächen des Flaches zur Grundfläche, und den dritten Theil eines Strahles, der senkrecht auf eine Fläche fällt, zur Höhe macht.

3) Man kann eine Spitzsäule bilden, die gleichen Inhalt mit einem gegebnen Flach hat, wenn man den Betrag aller Außenflächen des Flaches zur Grundfläche, und die halbe Flächenaxe zur Höhe macht.

§. 254. Körper-Verhältnisse.

1) Säulen und Spitzsäulen von gleichräumigen

Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen, und solche von gleichen Höhen zu einander wie ihre Grundflächen.

2) Flache von gleichen Flächenaxen verhalten sich zu einander wie die Summen ihrer Außenflächen, und Flache, bei denen der Sammbetrag aller Außenflächen sich gleich ist, verhalten sich zu einander wie die halben Flächenaxen.

§. 255. Nur 5 regelmäßige Körper sind möglich. (Erläuterung.) Ein wahrhaft regelmäßiger Körper muss von lauter gleichen Flächen eingeschlossen sein, die gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, also von gleichseitigen Dreiekken, von Gevierten, von regelmäßigen Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht- u. s. w. Ekken. Soll eine körperliche Ekke gebildet werden, so müssen wenigstens 3 Winkel zusammenstoßen; 2 Winkel bilden keine körperliche Ekke. Darum ist es unmöglich, einen regelmäßigen Körper aus Sechsekken zu gestalten. Denn der Winkel eines Sechsekkes beträgt 120 Grad; kommen 3 solche zu einer Ekke zusammen, so macht dies $3 \times 120 = 360$ Grad; allein 360 Grade können keine Ekke bilden, indem sie die Winkel um einen Punkt sind. Jede Ekke muss in allen ihren umliegenden Winkeln weniger als 360 Grad haben. Da die Winkel in einem regelmäßigen Siebenekk noch größer sind, als die in einem regelmäßigen Sechsekk, so lässt sich auch aus regelmäßigen Siebenekken kein regelmäßiger Körper bilden. Dasselbe gilt von allen übrigen regelmäßigen Vielekken. Es bleiben also nur das gleichseitige Dreiekk, das Geviert und das regelmäßige Fünfekk übrig. Die 2 letzten können nur zu je 3 Winkel zusammengestellt werden; denn 4 Winkel betragen beim Geviert 360 Grad und beim regelmäßigen Fünfekk noch mehr. Das gleichseitige Dreiekk kann aber nicht bloß zu je 3 Winkeln (im Vierflach), sondern

auch zu je 4 Winkeln (im *Achtflach*) und zu je 5 Winkeln (im *Zwanzigflach*) zusammengesetzt werden, und liefert also drei regelmäßige Körper. Das Rautenzwölfflach und das Dreißigflach sind nicht ganz regelmäßig, weil Winkel-Ungleichheit darin stattfindet. Es gibt also nur 5 regelmäßige Körper, die von ebnen Flächen eingeschlossen sind, nämlich das *Vierflach*, den *Würfel*, das *Achtflach*, das *Zwölfflach* aus Fünfekken und das *Zwanzigflach*.

III. *Kugelmessung.*

§. 256. *Würfelinhalt der Kugel und der Halbkugel.* (Angabe.) Man hat, wie sich späterhin (§. 289) das zeigen wird, ausgemittelt, daß jede Kugel 2 Drittel von einer Rundsäule beträgt, deren Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Will man darum den körperlichen Inhalt einer Kugel haben, so braucht man nur den Durchmesser der Kugel zu wissen. Aus diesem berechnet man den größten Kreisstrich einer Kugel, welcher den Grund der zu messenden Rundsäule ausmacht; und diesen Grund vervielfältiget man mit dem Durchmesser, als der Höhe der Rundsäule, und nimmt von dem Betrag 2 Drittheile. Es sei z. B. der Durchmesser oder die Axe einer Kugel 4 Zoll, so beträgt ihr körperlicher Inhalt 33$\frac{11}{21}$ □□″; denn:

$$7 : 22 = 4'' : 12\tfrac{4}{7}''$$

```
        4
     -------
  7 |  88  | 12
    |  7   |
     -------
       18
       14
     -------
       4/7
```

Der Inhalt des größten Kugel-Durchschnittes beträgt also (§. 165) 12$\frac{4}{7}$″ × 4 : 4, d. i. 12$\frac{4}{7}$ □″. So

viel beträgt auch der Grund der Rundsäule, die mit der Kugel gleichen Durchmesser und gleiche Höhe hat. Der Würfel-Inhalt dieser Rundsäule ist $4 \times 12\frac{4}{7} \square'' = 50\frac{2}{7}$ $\square\square''$; und davon betragen $\frac{2}{3}$ gerade $33\frac{11}{21} \square\square''$.

Eine Halbkugel ist gleichfalls $\frac{2}{3}$ von einer Rundsäule, mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe hat, oder deren Grund der Kreisfläche, deren Höhe dem Strahl gleicht. Ihr körperlicher Inhalt wird daher eben so gefunden, wie der der Kugel.

§. 257. Gewöhnliche Berechnung des Kugelinhalts. (Erörterung.) Man wählt aber bei der Berechnung des Kugelinhaltes gewöhnlich nicht den angegebnen Weg, sondern man vervielfältigt den Durchmesser der Kugel im Geviert mit dem Umfang derselben, und theilt den Betrag durch 6. Daſs diese Berechnung mit der vorigen gleich ist, erhellet aus Folgendem:

Der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe sind bei der Kugel, in Bezug auf die Rundsäule, gleich; mithin brauchen wir nicht erst den Umfang mit dem vierten Theil des Durchmessers und dieses Ergebniſs mit der Höhe, sondern können gleich den Umfang mit dem Geviert des Durchmessers vervielfältigen, und davon $\frac{1}{4}$ nehmen, um den Inhalt der Rundsäule zu bekommen. Da aber die Kugel davon nur $\frac{2}{3}$ ist, so nehmen wir nicht $\frac{1}{4}$, sondern gleich $\frac{1}{6}$.

Die Uebereinstimmung zeigt auch folgende Rechnung: Die vorher berechnete Kugel betrug $33\frac{11}{21} \square\square''$; diese kommen auch auf dem zweiten Wege heraus; denn:

$$4 \times 4'' = 16 \square''$$

$$16 \square'' \times 12\frac{4}{7} = 201\frac{1}{7} \square\square''$$

$$\frac{201\frac{1}{7} \square\square''}{6} = 33\frac{11}{21} \square\square''$$

§. 258. Berechnung der Kugeloberfläche. (Gleichung). Wie wir uns den Kreis gedacht haben als ein unendliches Vielekk, und hierauf die Ausmessung der

Kreisfläche im Geviert baueten, so können wir uns auch die Kugel als ein unendliches regelmäßiges Vielflach denken. Gehen wir die Körper vom Vierflach, Würfel, Achtflach, bis zum Dreißig- und Sechszigflach durch, so sehen wir ein immer weiteres Fortschreiten in die Kugel. Wie wir uns aber ein Sechszigflach in 60 Spitzsäulen zerlegen können, die alle gleich sind, und zum Grunde eine Sechszigflachoberfläche und zur Höhe eine halbe Flächenaxe haben, so können wir uns auch die Kugel umgekehrt aus unendlich vielen Spitzsäulen, deren Grund ein Stükk der Oberfläche, deren Höhe aber die halbe Axe derselben ausmacht, zusammengesetzt denken. So wie wir nun ein Sechszigflach, dem Würfel-Inhalte nach, berechnen können, indem wir den Geviertbetrag aller Außenflächen mit der halben Flächenaxe vervielfältigen und davon $\frac{1}{3}$ nehmen; so können wir auch den Würfelinhalt der Kugel erhalten, indem wir die Oberfläche mit dem halben Durchmesser vervielfältigen, und davon den dritten Theil nehmen, oder, was dem gleich ist, indem wir die Oberfläche mit $\frac{1}{6}$ des Durchmessers vervielfältigen.

Vergleicht man die eben aufgestellte Berechnungsart des Würfelinhaltes der Kugel mit der im vorigen §., so ergibt sich daraus die Berechnung der Oberfläche einer Kugel; denn nach der im vorigen §. aufgestellten Art erhält man den Würfelinhalt, indem man das Geviert des Durchmessers mit dem Umfang vervielfältigt und dieses mit 6 theilt; oder, was eben so viel ist, indem man den sechsten Theil des Durchmessers mit dem Erzeugniss aus dem Umfang und Durchmesser vervielfältiget ($4 \times 12\frac{4}{7} = 50\frac{2}{7}$; $50\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = 33\frac{11}{21}$); nach der eben angegebenen Art wird aber der Würfelinhalt erhalten durch Vervielfältigung des sechsten Theils des Durchmessers mit der Oberfläche; — folglich muss die Oberfläche gleich sein dem Umfang, vervielfältigt mit dem Durchmesser.

Will man also die Oberfläche einer Kugel wissen, so braucht man nur den Umfang mit dem Durchmesser zu vervielfältigen. Es muss z. B. die Oberfläche der in Rede stehenden Kugel $4 \times 12\frac{4}{7}$, d. i. $50\frac{2}{7}$ Geviertzoll betragen.

§. 259. Vergleichung der Kugeloberfläche mit dem größten Durchschnitt. (Gleichung.) Weil man den Geviertinhalt eines Kreises überhaupt, und also auch des größten Kreises bei einer gehälfteten Kugel durch Vervielfältigung des Umkreises mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers; hingegen den Geviertinhalt der Oberfläche der Kugel durch Vervielfältigung des Umkreises mit dem ganzen Durchmesser erhält; so ist bei einer Kugel die Oberfläche 4 Mal so groß, als die größte Durchschnittskreisfläche, und die halbe Oberfläche 2 Mal so groß, als die Kreisfläche.

Kennt man eine Größe bei einer Kugel, so lassen sich durch Berechnungen alle übrigen finden. Die einfachste Größe ist der Durchmesser oder die Axe. Hat man diese, so erhält man den Umfang durch das Verhältniss von 7 : 22, den Geviertinhalt des größten Kreises, durch Vervielfältigung von $\frac{1}{4}$ des Durchmessers mit dem Umkreise; den Oberflächen-Geviertinhalt durch Vervielfältigung des Durchmessers mit dem Umkreis; den Würfelinhalt durch Vervielfältigung des Oberflächeninhaltes mit $\frac{1}{6}$ des Durchmessers. Weiß man z. B., dass der Durchmesser unserer Erde 1720 Meilen beträgt, so gelangt man ohne Umstände zu allen übrigen Größenverhältnissen dieses Körpers.

Anweisung. Die Behandlung dieser Uebung ist so einfach, dass wenig braucht darüber gesagt zu werden. Bei den Ausmessungen der ebenflächigen Körper mache der Lehrer mehrere Anwendungen auf das bürgerliche Leben, zumal in Bürgerschulen. Solche Anwendungen sind z. B.: Es ist ein Keller zu graben, der so breit, so tief, so lang sein soll; zur Ausgrabung des Würfel-

fußes ist so viel Zeit, oder Geld erforderlich; wie viel Zeit, oder Geld, oder Mannschaften sind nöthig? — Es soll ein Haus von Ziegeln gebaut werden, so viel Fuß, Stokk u. s. w. hoch, lang, breit, mit so vielen und so großen Fenstern, die Mauer so und so dikk; wie viel Ziegeln sind nöthig? — Ich verweise für die Berechnung der Flächen und Körper auf folgendes Buch: „Die Raumrechnungen. Eine Anweisung zur Berechnung der Flächen und Körper für Seminare, städtische und gehobene Landschulen, wie auch zum Selbstunterricht, von Stubbe, Lehrer am Seminar in Bunzlau. Daselbst 1835.“ (120 Seiten — 15 Sgr).

Dritter Theil.

Verhältniss-Gleichungen.

Erste Uebung.

Flächen.

§. 260. Die Verhältnisse. (Erklärungen.) Kann man 2 Größen in gleiche Theile theilen, so stehen sie zu einander im Verhältniss, beide lassen sich mit einander vergleichen und die eine durch die andere messen. Hat man z. B. 2 Striche, wovon der eine genau in 5, der andere in 3 Zoll getheilt werden kann, so stehen sie beide zu einander in einem Verhältniss. Der eine enthält 5 solche Theile, als der andere 3 hat. Misst man den ersten Strich durch den zweiten, so beträgt er $1\frac{2}{3}$; misst man den zweiten durch den ersten, so beträgt er $\frac{3}{5}$. Solche zwei Größen, die sich nicht in gleiche Theile zerlegen lassen, sind unvergleichbar und unermessbar, sie stehen in keinem Verhältniss zu einander. Sind 2 Größen mit einander im Verhältniss, so gibt eine dritte

Größe, welche eine Zahl ist, das Wesen dieses Verhältnisses an, und diese Zahl nennt man die Verhältnißzahl (den Exponenten). Im obigen Verhältniß kann sowohl $1\frac{2}{3}$ als auch $\frac{3}{5}$ als Verhältnißzahl betrachtet werden, je nachdem man den ersten Strich durch den zweiten oder den zweiten durch den ersten misst. Um Irrungen zu vermeiden, ist es jedoch besser, die Verhältnißzahl in allen Fällen auf eine und dieselbe Weise zu bilden, und zwar so, daß man von den zwei zu vergleichenden Größen die erste durch die zweite theilt. So ist z. B. die Verhältnißzahl zwischen 20 und $5 = \frac{20}{5} = 4$, zwischen 5 und $20 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, zwischen 3 und $11 = \frac{3}{11}$, zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{5} = \frac{5}{6}$ rc. rc. Hieraus ergibt sich, daß man das erste Glied erhält, wenn man das zweite mit der Verhältnißzahl vervielfältigt und umgekehrt das zweite Glied, wenn man das erste durch die Verhältnißzahl theilt.

§. 261. Zu Gleichungen verbundene Verhältnisse. (Erklärung.) Haben 2 Verhältnisse dieselbe Verhältnißzahl, so bilden sie eine Gleichung (Proportion). Die Verhältnisse 6 : 18 und 12 : 36 bilden eine Gleichung; denn in beiden ist die Verhältnißzahl $\frac{1}{3}$. Achtzehn ist so oft in 6 enthalten, als 36 in 12. Man bezeichnet die Gleichung durch das gewöhnliche Gleichheitszeichen (=), so wie das Verhältniß durch das Zerfällungszeichen (:). Darum hat 6 : 18 = 12 : 36; 6 verhält sich zu 18 wie 12 zu 36. Verhältnißgleichungen, in denen die beiden mittlern Glieder gleich sind, heißen stetige Gleichungen, z. B. 4 : 6 = 6 : 9, andere dagegen unstetige, z. B. 5 : 25 = 6 : 30. Will man sich von der Richtigkeit einer Gleichung überzeugen, so kann man das erste Glied mit dem vierten, und das zweite mit dem dritten vervielfältigen, und fallen dabei beide Erzeugnisse gleich aus, so findet die Richtigkeit statt. Die Gleichungen können auf manche

Weise gewandelt und verändert werden, ohne daſs sie aufhören, Gleichungen zu sein. Nur einige mögen hier stehen:

1) Man kann die Gleichungen umkehren. Es ist also, da wir vorher hatten 5 : 25 = 6 : 30, eine richtige Gleichung, 30 : 6 = 25 : 5.

2) Man kann die einzelnen Verhältnisse umkehren, also 25 : 5 = 30 : 6.

3) Man kann die Glieder 1 und 3 zuerst, und 2 und 4 zuletzt nehmen, also 5 : 6 = 25 : 30.

4) Man kann die 2 ersten oder die 2 letzten Glieder, oder Glied 1 und 3 oder 2 und 4, oder alle 4 Glieder mit einer und derselben Zahl vervielfältigen und theilen, z. B.

$$5 \times 4 : 25 = 6 \times 4 : 30$$
$$5 \times 6 : 25 \times 6 = 6 : 30$$
$$5 : 25 = \tfrac{6}{3} : \tfrac{30}{3} \text{ u. s. w.}$$

5) Der Betrag des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zum zweiten, wie der Betrag des dritten und vierten Gliedes zum vierten; z. B.

$$5 + 25 : 25 = 6 + 30 : 30.$$

6) Dasselbe gilt vom Unterschiede, z. B.

$$25 - 5 : 25 = 20 - 6 : 30.$$

7) Zählt man die gleichnamigen Glieder mehrerer Verhältnisgleichungen, welche einerlei Verhältniszahl haben, zusammen, so bilden die Summen wieder eine Verhältnisgleichung mit derselben Verhältniszahl; z. B.

$$\begin{array}{rcl} 4 : 9 & = & 8 : 18 \\ 12 : 27 & = & 20 : 45 \\ 8 : 18 & & 16 : 36 \\ \hline 24 : 54 & = & 44 : 99. \end{array}$$

Die Verhältniszahl ist hier überall dieselbe, nämlich $\frac{4}{9}$.

8) Vervielfältigt man die Glieder einer Gleichung in sich 2 oder 3 Mal, so daſs man Geviert- oder Wür-

felzahlen enthält, so müssen auch die Gleichungen richtig sein; z. B.

$$5 \times 5 : 25 \times 25 = 6 \times 6 : 30 \times 30, \text{ oder}$$
$$5 \times 5 \times 5 : 25 \times 25 \times 25 = 6 \times 6 \times 6 : 30 \times 30 \times 30.$$

§. 262. Entdekkung mancher Größen durch die Gleichungen. (Erklärungen.) Durch Gleichungen werden viele unbekannte Größen entdekkt. Hier darüber nur Folgendes:

1) Da, wenn 2 Größen einer dritten gleich sind, sie auch unter einander gleich sein müssen; so bilden auch zwei Verhältnisse, die mit einem dritten eine Gleichung ausmachen, ebenfalls, in Verbindung mit einander, eine Gleichung; z. B. weil:

$$\frac{2 : 8 = 4 : 16 \text{ und } 3 : 12 = 4 : 16}{2 : 8 = 3 : 12.}$$

Ja, es können ganze Reihen von Verhältnissen zusammengestellt werden, und, sind alle richtig, so müssen die entferntesten, wie die nächsten, Gleichungen bilden.

2) Hat man die 3 ersten Glieder einer Gleichung, so findet man daraus leicht das vierte, indem man die Verhältnißzahl von den 2 ersten Gliedern sucht, und damit das dritte Glied theilt, wenn es das größere ist, und vervielfacht, wenn es das kleinere ist; z. B.

$$\underset{4}{\underline{2 : 8}} = 4 : 4 \times 4 \text{ und}$$
$$\underset{4}{\underline{8 : 2}} = 16 : \underset{4.}{\underline{16}}$$

Gewöhnlich (nach der Reguladetri) findet man das vierte Glied, indem man das zweite mit dem dritten vervielfältigt und das Ergebniß mit dem ersten Gliede theilt; dann stellt man die Gleichung auf:

$$2 : 8 = 4 : x, \text{ so muſs}$$
$$2 \times x = 8 \times 4 \text{ sein (§. 261.)}$$
$$\frac{2 \times x}{2} = \frac{8 \times 4}{2}$$
$$\frac{2 \times x}{2} = x$$
$$x = \frac{8 \times 4}{2}$$

§. 263. Stets ähnliche Striche, Flächen und Körper. (Anſchauung.)

Alle graden Striche ſind einander ähnlich, nicht aber alle krummen.

Alle Kreiſe ſind einander ähnlich, nicht aber alle Langrunde und Eirunde.

Solche Kreisbogen ſind einander ähnlich, die gleiche Maaße von demſelben oder von gleichen Winkeln ſind.

Alle gleichſeitigen Dreiekke ſind einander ähnlich, alle rechtwinklig gleichſchenkligen, alle Gevierte, alle regelmäßigen Vielekke von gleichen Seiten, alle Würfel, alle regelmäßigen Vier-, Acht-, Zwölf- und Zwanzigflache, alle Kugeln, die Rautenzwölfflache, die Dreißigflache, die Sechszigflache, die Vierundzwanzigflache und einige andere, §. 93 und §. 111 erwähnten, Körper von ganz ſtehenden Formen.

§. 264. Was Aehnlichkeit ſei. (Erklärung.) Aehnlich ſind ſich nämlich 2 Gegenſtände, in denen, ganz abgeſehen von der Größe, oder der Raumausdehnung, genaue Gleichheit der Form ſtattfindet. Dieſe Gleichheit der Form drükkt ſich durch Gleichzahl und Gleichlage aller einzelnen Theile, durch Gleichheit der Winkel und Ekken und durch Verhältnißmäßigkeit der Striche und Flächen aus. Wenn z. B. (Zeich. 100)

$\angle$ a = A
$\angle$ b = B
$\angle$ c = C ist,
und a b : a c = A B : A C
und a c : c b = A C : C B
und c b : a b = C B : A B,

so sind beide Dreiekke ähnlich; z. B.

b c = 2″ und B C 4″
b a = 3″ und B A 6″
a c = 4″ und A C 8″, und

es verhält sich 2 : 3 = 4 : 6
3 : 4 = 6 : 8
4 : 2 = 8 : 4.

Diese Rechtekke haben wohl alle gleiche Winkel, aber weil Höhe und Breite beliebig sind, so gibt es unähnliche Rechtekke; die Rauten haben wohl alle 4 gleichlange Seiten, aber weil das Winkelverhältniss beliebig ist, so gibt es unähnliche Rauten. Dasselbe gilt von den Rautensechsflachen, allen Säulen und Spitzsäulen.

§. 265. Messungen, gegründet auf Aehnlichkeit. (Erklärung.) Weiß man, dass 2 Flächen oder 2 Körper einander ganz ähnlich sind, so kann man, wenn die Größe des einen bekannt ist, die Größe des andern leicht heraus bringen; und so ist es denn möglich, so gar weit entfernt stehende und außerordentlich große Gegenstände fast bloß durch Berechnungen zu messen. Wissen wir z. B., dass (Zeich. 100) a b c ∽ A B C, so brauchen wir nur alle Seiten von a b c und von A B C nur B C messen, so bringen wir auch die Länge von A B heraus. Wäre A B die Höhe eines Thurmes, so hätten wir diese heraus gebracht, ohne sie würklich gemessen zu haben.

§. 266. Verjüngter Maaßstab. (Erklärung.) Hat man einen großen Raum, z. B. eine Wiese, zu

messen, die ein unregelmäßiges Fünfekk ausmacht (s. Zeich. 101), so braucht man, um den Geviertinhalt zu erhalten, nicht die Wiese selbst in Dreiekke zu zertheilen, sondern man trägt sich auf das Papier ein ähnliches Fünfekk auf. Um dieses zu können, bildet man sich einen verjüngten Maaßstab, d. h. einen Maaßstab, der keine würklichen, sondern angenommene Längen enthält, z. B. einen Maaßstab, auf dem ein Zoll einen Fuß, oder eine Ruthe, oder eine Meile bedeutet. Je kleiner man eine Zeichnung von einer Fläche machen will, desto verkleinerter muſs der Maaßstab sein. Hat man sich einen verjüngten Maaßstab auf Holz oder auf dem Papier gemacht, so geht man an die Ausmessung des Fünfekkes. Man misst zuerst eine Seite aus, z. B. a b. Diese beträgt 20 Ruthen 5 Schuh. Es wird jezt auf dem Papier ein grader Strich gezogen, und dieser im verjüngten Maaßstab genau 20 Ruthen 5 Schuh gemacht. Ist der verjüngte Maaßstab so eingerichtet worden, daſs Ruthen in der Verjüngung durch würkliche Zolle dargestellt sind, so würde der Strich, der im verjüngten Maaßstab 20 Ruthen 5 Schuh darstellen soll, in der Würklichkeit 20 Zoll 5 Striche betragen, und der verjüngte Maaßstab würde sich zum würklichen verhalten, wie 1 zu 12 × 12 = 144. Stellt man im verjüngten Maaßstabe die Meilen durch Zolle dar, so verhält sich die Verjüngung zur Würklichkeit, wie 1 zu 240,000. Bei Landkarten ist die Verjüngung gewöhnlich noch weit größer. Doch zum Fünfekk zurück!

Ist der Strich b a im verjüngten Maaßstabe auf's Papier getragen, so misst man auf dem Felde den Winkel a, und trägt diesen auf dem Papier an das Ende a von dem Strich b a an, misst darauf in der Würklichkeit den Strich e a, und trägt ihn im verjüngten Maaßstab an den Winkel a an. Betrüge e a in der Würklichkeit 15 Ruthen, so würde auf dem Papier, nach unserer An-

nahme, der Strich e a 15 Zoll lang sein. Darauf ist der Winkel e zu messen, und an den Endpunkt e auf dem Papier anzutragen. Die Richtung e d in der Würklichkeit ist dann zu messen und im verjüngten Maaßstabe aufzutragen. So fährt man fort, bis man rings herum alle Seiten und Winkel gemessen und diese nach Graden, jene nach dem verjüngten Maaßstab aufgetragen hat. Ist die Zeichnung des Fünfekkes fertig, so braucht man auf dem Felde nichts mehr zu messen, sondern man theilt das Fünfekk auf dem Papier in Dreiekke, und vermisst, wie §. 162 angegeben ist, jedes einzelne Dreiekk. Das Ergebniss aus allen Dreiekken nimmt man zusammen, und erhält so den Gesammtbetrag des Fünfekkes auf dem Papier, oder des Fünfekkes, das im verjüngten Maaßstabe eine fünfekkige Wiese vorstellt. Will man nun den Geviertinhalt der Wiese haben, so braucht man nur den Geviertinhalt des Fünfekkes auf dem Papier aus dem verjüngten Maaßstab in den würklichen zu erheben. Betrüge z. B. der Geviertinhalt 1620 Geviertzoll, so würde das in der Würklichkeit 1620 Geviertruthen sein, weil wir Zolle in der Verjüngung als Ruthen angenommen haben.

§. 267. **Seitenverhältnisse, wenn in einem Dreiekk ein Strich gleichlaufend mit einer Seite gezogen wird.** (Lehrsatz) Wird in einem Dreiekk ein Strich so, gleichlaufend mit einer Seite des Dreiekkes, gezogen, dass seine Enden die beiden andern Seiten berühren oder durchschneiden, so verhalten sich die beiden getheilten Seiten so zu einander, wie ihre obern oder untern Theile, die ebenfalls in gleichem Verhältniss stehen. — Es sei z. B. (Zeich. 103) in dem Dreiekk a b c der Strich e d mit der Seite b c so gleichlaufend gezogen, dass a b in a e und e b, so wie a c in a d und d c zerfällt, so muss

$$ab : ac = ae : ad;$$
$$ab : ac = eb : dc;$$
$$eb : dc = ae : ad.$$

Um den Beweis zu führen, zieht man sich die Hülfsstriche ec und bd. Man erhält dadurch die Dreiekke edb und edc, welche dem Geviertinhalt nach gleich sein müssen, weil sie (freilich umgekehrt) auf gleichem Grunde (ed) stehen und zwischen zwei gleichlaufenden Strichen sich befinden, also dieselbe Höhe haben (§. 199). Fügt man zu jedem Dreiekk das obere ead hinzu, so hat man 2 größere gleiche Dreiekke, nämlich

$$\triangle ecd + \triangle eda = \triangle eac$$
$$\triangle edb + \triangle eda = \triangle bda.$$

Die Dreiekke bda, edb und ead, haben alle 3 zur gemeinsamen Höhe einen Strich, der von der gemeinsamen Spitze d auf ab winkelrecht gezogen ist; sie verhalten sich also zu einander, wie ihre Grundflächen. Darum verhält sich

$$\triangle adb : \triangle edb = ab : eb$$
$$\triangle adb : \triangle eda = ab : ea$$
$$\triangle edb : \triangle eda = eb : ea.$$

Weil wir wissen, dass

$$\triangle edc = \triangle edb$$
$$\triangle cac = adb,$$

so können wir auch sagen:

$$eac : edc = ab : eb$$
$$eac : eda = ab : ea$$
$$edc : eda = eb : ea.$$

Nun aber verhalten sich die 3 Dreiekke edc, eda und eca ebenfalls, weil sie gleiche Höhe haben, nämlich in dem Strich, der von e aus winkelrecht auf ac gezogen ist, wie ihre Grundstriche; also:

$$eac : edc = ac : dc$$
$$eac : eda = ac : da$$
$$edc : eda = dc : da.$$

Wenn aber 2 Verhältnisse mit einem dritten sich einen, oder eine Gleichung ausmachen, so müssen sie auch mit einander sich einen (§. 262, 1). In den 2 Mal drei vorstehenden Reihen treffen aber die 2 ersten Verhältnisspaare; darum sind auch jezt folgende Gleichungen richtig:

a b : e b = a c : d e
a b : e a = a c : d a
e b : e a = d c : d a

Weil man in jedem Verhältniss das dritte Glied zum zweiten, das zweite zum dritten machen kann (§. 261, 3), so sind auch folgende Verhältnisse richtig:

a b : a c = e b : d c
a b : a c = e a : d a
e b : d c = e a : d a.

§. 268. Wie man verhältnissmäßige Striche bildet. (Folge-Aufgabe.)

1) Es sind (Zeich 175) die beiden Striche a i und o e gegeben, um dazu einen dritten zu suchen, der sich zu o e verhält wie o e zu a i. — Man macht einen Winkel von beliebiger Größe, hier t a v, trägt den Strich a i auf den Schenkel a v, so dass a m gleich dem Strich a i ist. Den Strich o e trägt man an m und an a auf dem andern Schenkel an, so dass m n und a r, jedes einzeln, gleich sind o e, die Punkte r m verbindet man und zieht damit von n aus einen gleichlaufenden Strich, der das Stükk r s abschneidet, welches der dritte Strich in dem Verhältniss ist, so dass

r s : m n = a r : a m, oder
r s : o e = o e : a i.

2) Es sind (Zeich. 113) die 3 Striche a i, o e und u v gegeben, um dazu einen vierten zu suchen, der das letzte Glied in der Gleichung ausmacht. — Man bildet den Winkel b n f, trägt a i und o e auf n f, so dass a i = n r, und o e = r s wird. Auf den andern Schenkel

trägt man u v, so dass ihm n p gleich wird. Den Punkt r verbindet man mit p, und mit dem Strich r p zieht man von s aus einen gleichlaufenden Strich, hier s q, so muss p q der vierte Verhältnissstrich sein; so dass

n r : r s = n p : p q, oder

a i : o e = u v : p q.

§. 269. Gleichlauf des in einem Dreiekk gezogenen Striches mit einer Seite, bei Verhältnissmäßigkeit der durchschnittenen Seiten mit ihren Theilen. (Lehrsatz.) Werden in einem Dreiekk 2 Seiten so von einem Strich durchschnitten, dass sie sich zu einander verhalten, wie die auf derselben Seite des durchschneidenden Striches liegenden Seitenstükke, so muss der durchschneidende Strich gleichlaufend mit der Seite des Dreiekkes sein, die er nicht durchschneidet. — Es ist z. B. (Zeich. 104) a b und a c von e d so durchschnitten, dass

a b : a c = e b : d c, und

a b : a c = a e : a d.

Folglich muss e d gleichlaufend mit b c sein.

Zum Beweise Folgendes: Wäre e d nicht gleichlaufend mit b c, so müsste von dem Punkt e oder d aus doch irgend ein Strich gleichlaufend mit b c gezogen werden können. Angenommen, er würde von e aus gezogen, so müsste er, da e d ein Mal nicht gleichlaufend mit b c sein soll, entweder über oder unter d, den Strich a c durchschneiden. Nehmen wir ein Mal an, es geschähe dies in x, so müsste nach dem vorigen Lehrsatz

a b : a c = a e : a x;

und nach unserer Annahme verhält sich

a b : a c = a e : a d

a e : a x = a e : a d

a e : a e = a x : a d

a e = a e

a x = a d,

was Keiner zugeben kann, da ad größer ist als ax. Zögen wir einen Strich von e aus so, daſs er unter d den Strich ac durchschnitte, so geriethen wir in denselben Widerspruch. Wir entgehen diesem nur dadurch, daſs wir annehmen, ed ist gleichlaufend mit bc.

§. 270. **Aehnlichkeit der Dreiekke, bedingt durch 2 Winkel.** (Lehrsatz.) Weiß man, daſs in einem Dreiekk 2 Winkel, einzeln genommen, eben so groß sind, als 2 Winkel, einzeln genommen, in einem andern Dreiekk; so kann man von der vollständigen Aehnlichkeit beider Dreiekke überzeugt sein.

Weiß man z. B. Zeich. 105, daſs

$$\angle B = \angle b$$
$$\angle C = \angle c$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle abc, \text{ d. h.}$$
$$\angle A = \angle a, \text{ und}$$
$$AB : BC = ab : bc$$
$$BC : CA = bc : ca$$
$$CA : AB = ca : ab$$

Daſs der Winkel A dem Winkel a gleich sei, bedarf keines weitern Beweises, weil alle Winkel in einem Dreiekk 180 Grad betragen, und daher die Gleichheit je zweier Winkel die Gleichheit des dritten Winkels im nothwendigen Gefolge hat.

Es ist also nur noch die Verhältniſsmäßigkeit der Seiten zu beweisen. Zu diesem Behuf trage man das Dreiekk abc so auf den Winkel B, daſs man macht:

$$Bo = ba \text{ und}$$
$$Bu = bc,$$

und verbinde o mit u. Das neue Dreiekk Bou muſs von bac gedekkt werden; da $\angle B = \angle b$, $Bo = ba$ und $Bu = bc$. Weil beide Dreiekke sich dekken, so muſs $\angle o = \angle a$ sein; und da $\angle A = \angle a$ ist, so muſs $\angle o = \angle A$ sein. Daraus ergibt sich, daſs

ou # *) mit AC ist (Gleichheit von äußern und innern Gegenwinkeln, §. 147). Aus dem Gleichlauf von ou mit AC folgt:

$$AB : BC = Bo : Bu.$$

Es war $Bo = ba$
$Bu = bc$

$$AB : BC = ba : bc.$$

Um ein zweites Verhältniſs zu erhalten, wird $\triangle$ abc in den Winkel A eingetragen, so daſs $As = ab$ und $Av = ac$ ist, mithin $\triangle Asv \cong \triangle abc$ wird, weil $\angle A = \angle a$ ist. Da nun $\angle v = \angle c$ und $\angle c = \angle C$, mithin $\angle C = \angle v$ ist, so läuft sv gleich mit BC, und folglich verhält sich:

$$AC : AB = Av : As$$
$$Av = ac$$
$$As = ab$$

$$AC : AB = ac : ab.$$

Um das dritte Verhältniſs heraus zu bringen, könnte man auf gleiche Weise das $\triangle$ abc in den Winkel C tragen; allein dies ist nicht ein Mal nöthig; denn aus den gefundenen zwei Verhältnissen ergibt sich das dritte von selbst. Die gefundenen waren:

$$AB : BC = ab : bc$$
$$AC : AB = ac : ab.$$

Aus diesen folgt:

$$AB : ab = Bc : bc \text{ (§. 161, 3.)}$$
$$AC : ac = AB : ab \text{ (§. 161, 3.)}$$

$$AC : ac = BC : bc \text{ (§. 261, 1.)}$$

$$AC : BC = ac : bc \text{ (§. 161, 3.)}$$

§. 271. Folgerungen aus §. 270.

1) Wird in einem Dreiekk ein Strich gleichlaufend mit einer Seite desselben durch die beiden andern gezogen, so muſs das dadurch abgeschnittene Dreiekk (wegen Dek-

*) Das Zeichen # zeigt an Gleichlauf oder Spätigkeit.

kung dreier einzelner Winkel) dem ganzen ähnlich sein; woraus sich denn ergibt, daſs nicht allein die durchschnittenen Seiten mit den einzelnen Stükken im Verhältniſs stehen, sondern auch die gleichlaufenden Seiten. So verhält sich (Zeich. 103):

ab : bc = ae : ed;
bc : ca = ed : da;
bc : ed = ab : ae;
bc : ed = ac : da;

2) Weiß man, zwei Dreiekke sind gleichschenklig, so braucht man nur zu wissen, daſs in beiden die von den gleichen Schenkeln eingeschlossenen Winkel gleich sind, um von der Aehnlichkeit beider Dreiekke überzeugt zu sein.

3) Weil sich Rauten durch Geeren in gleichschenklige Dreiekke zerlegen lassen, so müssen Rauten ähnlich sein, von denen nur die Gleichheit eines Winkels ermittelt ist.

4) Der Doppelzirkel, der Scheitelwinkeln mit 2 kurzen und 2 langen Schenkeln gleicht, gründet sich auf die Aehnlichkeit zweier gleichschenkliger Dreiekke, bei Gleichheit der von den gleichen Schenkeln eingeschlossenen (hier der Scheitel-) Winkel. Er wird von Uhrmachern und andern Künstlern gebraucht, um Striche, in verhältniſsmäßiger Größe, verkleinert oder vergrößert, abzutragen. Will man verkleinern, so faſst man die Striche mit der weiten Oeffnung und trägt sie ab mit der engen, und so umgekehrt. Zur Abtragung ähnlicher verkleinerter oder vergrößerter Dreiekke hat man auch einen dreispitzigen Doppelzirkel.

5) Unser Sehen gründet sich auf die Aehnlichkeit von 2 Dreiekken. Sehen wir z. B. (Zeich. 133) von o aus den Gegenstand b r, so wirft derselbe sein Bild in unser Auge in der Richtung von ro und bo, und von da hinter das Auge, so daſs q p dieser Gegenstand ist, der gleichlaufend mit br liegt, und verhältniſsmäßig dieselbe Beziehung zu o hat als br; so daſs sich po zu ob ver-

hält, wie g o zu o r; und o r zu r b, wie o q zu q p. — Stellt man sich entfernter vom Gegenstande, hier in u, statt in o, so bilden sich 2 ganz andere ähnliche Dreiekke, und man erhält vom Gegenstande ein weit kleineres Bild, wie hier w v zeigt. In dem Maaße, daſs der Sehwinkel (hier b o r und b u r) kleiner wird, in dem Maaße muſs auch der Gegenstand kleiner werden. Der Sehwinkel wird aber desto kleiner, je weiter man sich vom Gegenstande entfernt, oder je höher das Dreiekk wird, dessen Grund der Gegenstand ist. (§. 202.)

6) Man kann zu 2 gegebnen Strichen, z. B. zu AC und CD, (Zeich. 114) leicht den mittlern Verhältniſsstrich finden, wenn man beide zusammensetzt, auf ihren Einigungspunkt einen senkrechten Strich errichtet und diesen durch einen Bogen begrenzt, der vom Mittelpunkt des vereinten Striches mit seiner Hälfte geschlagen ist. Zeich. 114 ist AB und CD in FH vereinigt, so daß FE = AB und EH = CD ist. Auf den Vereinigungspunkt E steht der winkelrechte Strich GE, und ist begrenzt durch den Bogen, der von I aus, als dem Mittelpunkt von FH, mit IH oder FI gezogen ist; es muſs also GE der mittlere Verhältniſsstrich sein, oder

FE (AB) : GE = GE : EH (CD).

Zum Beweise ziehe man die Striche GF und GH. Dadurch entstehen 3 Dreiekke, nämlich FGH, GEH und FEG. Das letzte ist dem ersten ähnlich; denn:

$\angle r = 90$ Gr. (GE winkelrecht)
$\angle FGH = 90$ Gr. (auf einem Durchmesser)

$\angle r = \angle FGH$
$\angle GFH = \angle GFH$

$\triangle FEG \sim \triangle FGH$ (§. 270)

$\angle o = \angle FGH$ (EHG). Nun ist auch
$\angle r = \angle s$

$\triangle FEG \sim \triangle GEH$ (§. 270)

FE (AB) : GE = GE : EH (CD).

7) Weil Zeich. 114 FGH ein rechtwinkliges Dreiekk ist, so ergibt sich aus 6, dass in einem rechtwinkligen Dreiekk der winkelrechte Strich, den man von der Spitze des rechten Winkels auf die gegenüber stehende Seite ziehen kann, jedes Mal die mittlere Verhältnissgröße zwischen dem kürzern und längern Theil der durchschnittenen Seite ist.

8) Gleichfalls erhellet aus 6, dass, wenn man aus irgend einer Stelle eines Halbkreises oder Kreises einen Strich winkelrecht auf den Durchmesser zieht, dieser Strich die mittlere Verhältnissgröße zwischen den beiden Theilen des Durchmessers ist.

§. 272. Anwendungen von §. 270. Darauf, dass man von 2 gleichen einzelnen Winkeln auf die Aehnlichkeit der Dreiekke schließen kann, gründen sich mehrere wichtige Ausmessungen und Berechnungen, wovon folgende hier ihren Platz finden mögen:

1) Man kann die Entfernung zweier Oerter von einander messen, wenn gleich nur der eine in grader Richtung zugänglich ist.

Es sei z. B. (Zeich. 106) die Entfernung von ks zu messen, zwischen welchen beiden Punkten ein Fluss ist, und es sei unmöglich, von dem Punkt x aus ein Dreiekk zu errichten, was das Dreiekk xks dekkt (§. 173, 1); so errichtet man von x aus ein ähnliches Dreiekk, hier xaw Man misst nämlich die Ausdehnung xk, und trägt davon einen gewissen kleinern Theil, z. B. $\frac{2}{3}$, hinter x zurükk; an den Punk w wird der Winkel k angesetzt, und der neue Schenkel so weit ausgedehnt, dass sein Endpunkt (hier a) mit x und s in einer Richtung steht. Darauf braucht nur aw gemessen und daraus ks berechnet zu werden; denn betrug xw $\frac{2}{3}$ von kx, so muss auch aw $\frac{2}{3}$ von ks sein. Betrüge z. B. aw 4 Ruthen, so würde ks 6 Ruthen ausmachen.

Der Beweis von der Aehnlichkeit der beiden Dreiekke ist leicht; denn:

$$\angle o = \angle i \text{ (Scheitelwinkel)}$$
$$\angle w = \angle k \text{ (so gemacht)}$$
$$\triangle xaw \backsim \triangle xsk.$$

Man hat auch nicht nöthig, dann ähnliche Dreiekk auf dem Felde zu errichten; man kann es im verjüngten Maaßstabe auf das Papier zeichnen und daraus Alles berechnen. Will man z. B. die Entfernung ks ausmessen, so wählt man sich auf dem Felde den Punkt x, misst den Abstand xk, trägt diesen im verjüngten Maaßstabe auf das Papier, misst darauf die Winkel skx und i in Graden und trägt sie an den Strich auf dem Papier an; die freien Schenkel beider Winkel werden bis zur Durchschneidung verlängert, und es müssen die Seiten, die gleichen Winkeln gegenüber stehen, im Verhältniss sein.

2) Man kann die Höhe eines Gegenstandes messen, z. B. eines Thurmes oder Baumes, ohne hinauf zu steigen, wenn man sich nur mit ihm auf gleicher Grundebene befindet.

Es soll z. B. die Höhe des Thurmes AB (Zeich. 107) gemessen werden, und es befindet sich von einem Punkt aus, z. B. von C aus bis B, eine wagerechte Ebene, so kann man auf folgende Art die Höhe AB messen:

Man misst den Strich CB und trägt ihn im verjüngten Maaßstabe, als cb, auf das Papier. Darauf misst man den Winkel ACB mit einem Messwerkzeuge und trägt ihn an den Punkt c des verjüngten Striches bc an. Endlich errichtet man in dem Punkt b an dem Strich bc einen winkelrechten Strich, und verlängert die freien Schenkel der Winkel b und c bis zu ihrer Durchschneidung, welche in dem Punkt a sich ereignet. Jetzt muss ab im verjüngten Maaßstabe die Höhe von AB sein.

Als Beweis diene:

$$\angle b = \angle B \text{ (als rechte Winkel)}$$
$$\angle c = \angle C \text{ (so gemacht)}$$
$$\triangle abc \backsim \triangle ABC$$
$$ab : bc = AB : BC$$
$$ab : AB = bc : BC.$$

Betrüge z. B. BC 30 Ruthen, bc 3 Zoll und ab 2 Zoll, alles dreies nach Messungen, so müsste AB 20 Ruthen sein.

Es gibt noch zwei andere Arten, die Höhe AB zu messen:

a) Man stekke einen Stab, hier DE, senkrecht in die Erde, lege sich auf dieselbe, und rükke sich so lange hin und her, bis man den Punkt gefunden hat, von dem aus man die Spitze des Stabes und des zu messenden Gegenstandes, also hier D und A, sieht. Die Stelle, wo man das Auge hat, hier C, bezeichnet man. Die 3 Punkte ADC liegen in einer Richtung. Jetzt messe man die Entfernung des Augenpunktes (C) von dem untern Ende des Stabes (E) und von dem untern Ende des zu messenden Gegenstandes (B) und den Stab selbst, so weit er über der Erde hervorragt; — also hier EC, CB und DE. Aus diesen drei durch Messung bekannten Größen lässt sich die unbekannte, hier AB, durch Verhältnisse ermitteln; denn da

$$\angle ABC = \angle DEC \text{ (rechte)}$$
$$\angle BCA = \angle ECD \text{ (selbe)}$$
$$\triangle BAC \backsim \triangle DEC$$
$$EC : ED = CB : BA.$$

Beträgt z. B. EC 5′, DE 4′ und CB 14′, so muss BA gleich sein $\frac{4 \times 14'}{5}$, d. i. $11\frac{1}{5}$ Fuß.

b) Aus der Länge des Schattens, den bei sonnigem Wetter AB wirft, lässt sich auch seine Höhe messen. Man stekkt nämlich neben A B einen Stab senkrecht in die Erde, hier D E. Die Länge des Schattens von B A sei B C, und die des Schattens von D E sei E C; die Länge vom Stabe D E, und von den beiden Schatten B C und E C lassen sich messen, und aus diesen 3 Größen kann man die vierte, nämlich B A, durch die gewöhnliche Verhältnissrechnung heraus bringen. Da sich die Schatten in jedem Augenblikk mit dem Steigen und Sinken der Sonne verändern, so ist bei dieser Schattenmessung wohl darauf zu sehen, dass keine große Zeit zwischen der Messung beider Schatten liegt.

3) Man kann auch eine Höhe messen, mit der man sich wohl auf einer Ebene befindet, deren Fuß man sich aber nicht unmittelbar nahen kann.

Es sei z. B. (Zeich. 108) die Höhe des Thurmes AB zu messen, der in einem See steht, so dass man nicht unmittelbar von irgend einem Standpunkt zu ihm gelangen kann.

Um diesen Thurm zu messen, wählt man sich 2 Standpunkte, von denen der eine dem Thurme näher ist, als der andere, hier C und D; die Entfernung dieser beiden Punkte misst man, und trägt den Strich (hier C D) im verjüngten Maaßstabe aufs Papier, so dass c d im verjüngten Maaßstabe C D darstellt. Die Winkel X und U werden durch Hinschauen von C und D auf A und B gemessen, an die Endpunkte des verjüngten Striches c d in derselben Lage angetragen, welche sie in der Würklichkeit haben, wobei c d bei dem Punkt c beliebig verlängert wird, ohne den Punkt c zu verrükken. Die Schenkel c b und d b werden verlängert bis zum Durchschneiden, was in b stattfindet, und von diesem Punkt zieht man einen winkelrechten Strich auf das verlängerte c d, nämlich b a; dieser Strich muss im

verjüngten Maaßstabe die Höhe des Thurmes BA darstellen, der also damit gemessen ist. Der Beweis davon lautet so:

$\angle u = \angle U$ (so gemacht)

$\angle o = \angle O$ (weil $x = X$ gemacht ist)

$\triangle bcd \backsim \triangle BCD.$

$cd : cb = CD : CB$

$cd : CD = cb : CB.$

Ferner ist $\angle x = \angle X$ (so gemacht)

$\angle a = \angle A$ (als rechte)

$\triangle acb \backsim \triangle ACB$

$cb : ab = CB : AB$

$cb : CB = ab : AB,$

nun aber verhält sich

$cd : CD = cb : CB$

$cd : CD = ab : AB$ (§. 262, 1.)

cd ist aber im verjüngten Maaßstab CD, also ist ba im verjüngten Maaßstab auch BA, mithin braucht man nur ba zu messen, um BA zu erhalten.

§. 273. Aehnlichkeit der Dreiekke, bedingt durch Gleichheit eines Winkels und Verhältnissmäßigkeit der anliegenden Schenkel. — (Lehrsatz.) Ist in einem Dreiekk ein Winkel so groß, als ein Winkel in einem andern Dreiekk, und haben in beiden Dreiekken die, diese gleiche Winkel einschließenden, Schenkel ein gleiches Verhältniss, so müssen beide Dreiekke einander ähnlich sein.

Wenn also (Zeich. 105) $\angle B = \angle b$ ist, und $BA : BC = ba : bc$, so muss $\triangle BAC \backsim \triangle bac$ sein.

Zum Beweise trage man das Dreiekk bac auf den Winkel B, so dass $ba = Bo$, und $bc = Bu$ gemacht wird, und $\angle b$ auf $\angle B$ liegt; so müssen die beiden

Dreiekke B o u und b a c sich dekken. Aus der Dekkung beider ergibt sich, dass ∠ o = ∠ a ist.

Ferner muss, weil BA : BC = ba : bc, auch

$$\frac{\frac{BA : BC = Bo : Bu}{ou \,\#\, AC}}{\angle o = \angle A}$$

∠ o = ∠ A ist. Nun war

$$\frac{\angle o = \angle a}{\angle a = \angle A.}$$

Mithin sind 2 Winkel in dem einen Dreiekk einzeln so groß, als 2 Winkel in dem andern, woraus die Aehnlichkeit beider erhellet. (§. 270.)

§. 274. Anwendungen von §. 273.

1) Soll man die Entfernung zweier Oerter ausmessen, zwischen denen ein Hinderniss sich befindet, und kann dies nicht durch sich dekkende Dreiekke bewürkt werden (§. 171), so bedient man sich dazu der ähnlichen Dreiekke. Es soll z. B. (Zeich. 102) die Entfernung von a b, zwischen welchen beiden Punkten sich ein See befindet, ermittelt werden; und man ist verhindert, von dem angenommenen Standpunkt c aus ein Dreiekk (hier c d e) zu errichten, was dem Dreiekk a b c gleich und ähnlich wäre, so braucht man nur von dem gewählten Standpunkt aus ein ähnliches Dreiekk (hier c s w) zu errichten. Dies geschieht, indem man die Striche a c und c b misst und verhältnissmäßig zurükträgt, so dass z. B. c w $\frac{1}{2}$ von a c, und c s $\frac{1}{2}$ von c b beträgt, und c w mit c a, wie c s mit c b in einer Richtung sind. Misst man darauf die Entfernung der Punkte s w, so erhält man $\frac{1}{2}$ von a b; denn ∠ r = ∠ i als Wechselwinkel, und a c : c b = c w : c s, mithin sind beide Dreiekke ähnlich, und es muss sich also s w : s c = a b : b c, oder s w : a b = s c : b c verhalten. Einfacher ist es noch, gewisse Theile von a c und b c abzuschneiden, z. B. $\frac{2}{3}$, so

dass f c $\frac{2}{5}$ a c, und t c $\frac{2}{5}$ c b ist, so muss auch f t $\frac{2}{5}$ von a b sein.

Statt die Aufgabe auf dem Felde zu lösen, kann man sie auch auf dem Papier abmachen. Man misst nämlich den Winkel r auf dem Felde und trägt ihn auf das Papier. Darauf misst man die Striche a c und b c und trägt sie im verjüngten Maaßstabe an den Winkel r, ihre Endpunkte verbindet man, und der Verbindungsstrich muss im verjüngten Maaßstabe die Entfernung von a b darstellen, weil das Dreiekk auf dem Papier dem Dreiekk auf dem Felde ähnlich ist.

2) Man kann auch die Entfernung zweier Oerter messen, zu deren keinem man von dem Orte, wo man sich befindet, in grader Richtung unmittelbar kommen kann. — Es ist z. B. möglich (Zeich. 109), die Entfernung des Hauses A von dem Baum B zu messen, wenn gleich man jenseit eines Flusses sich befindet, der vor beiden Gegenständen vorbei fließt, z. B. hier auf der Seite von C D.

Um die Messung auszuführen, wählt man sich auf der Seite des Standpunktes 2 Stellen, hier C und D, welche man mit Stäben bezeichnet. Diese 2 Punkte müssen so gewählt sein, dass man von jedem den andern sowohl, als den Baum und das Haus sehen kann, deren Abstand zu messen ist. Durch diese 3 Sichten von den gewählten Punkten C und D gewinnt man die 4 Winkel r, u, o, i, welche alle 4 gemessen werden. Ist dies geschehen, so misst man die Entfernung von C D und trägt sie im verjüngten Maaßstab aufs Papier, so dass c d im verjüngten Maaßstab C D darstellt. An c d trägt man zuerst die Winkel u und o, und dann die beiden andern, r und i, und verlängert die 4 freien Schenkel bis sie sich in 2 Punkten durchschneiden. Diese 2 Durchschnittspunkte, hier a und b, haben im verjüngten Maaßstab dieselbe Entfernung, wie A B, deren Entfernung also leicht aus

dem zu messenden a b zu berechnen ist. Der Beweis wird so geführt:

$$\angle c\,(r+u) \text{ in } \triangle\, acd = \angle C\,(r+u) \text{ in } \triangle\, ACD$$
$$\angle o \text{ in } \triangle\, acd = \angle O \text{ in } \triangle\, ACD$$

$$\triangle\, acd \backsim \triangle\, ACD.$$

Aus denselben Gründen ist

$$\triangle\, cdb \backsim \triangle\, CDB.$$

Aus der Aehnlichkeit von a c d mit A C D folgt

$$ac : cd = AC : CD$$

$$ac : AC = cd : CD.$$

Aus der Aehnlichkeit von c d b und C D B folgt

$$bc : cd = BC : CD$$

$$bc : BC = cd : CD.$$

Aus der Vergleichung der beiden Ergebnisse folgt

$$ac : AC = bc : BC. \quad (\S.\ 262,\ 1.)$$

Daraus ergibt sich, dass

$$ac : bc = AC : BC.$$ Nun aber ist

$$\angle r \text{ in } \triangle\, abc = \angle r \text{ in } \triangle\, ABC$$

$$\triangle\, abc \backsim \triangle\, ABC$$

$$ab : bc = AB : BC$$

$$ab : AB = bc : BC.$$ Vorher hatten wir

$$bc : BC = cd : CD$$

$$ab : AB = cd : CD \quad (\S.\ 262,\ 1.)$$

$$ab : cd = AB : CD$$

$$cd : ab = CD : AB \quad (\S.\ 261,\ 2.)$$

A B ist also, nachdem c d, a b und C D gemessen sind, auf gewöhnlichem Wege zu berechnen.

§. 275. Aehnlichkeit der Dreiekke, bedingt durch Verhältnissmäßigkeit aller Seiten. (Lehrsatz.) Haben in 2 Dreiekken alle 3 Seiten dasselbe Verhältniss, so sind sie ähnlich; es müs=

sen also auch die Winkel einzeln alle 3 gleich sein. — Es sei z. B. (Zeich. 105) folgende Annahme richtig:

$$AB : AC = ab : ac$$
$$AC : BC = ac : bc$$
$$BC : AB = be : ab,$$

so muss

$$\angle A = \angle a$$
$$\angle B = \angle b$$
$$\angle C = \angle c \text{ sein.}$$

Zum Beweise mache man $oB = ab$ und $uB = bc$ und verbinde ou! Weil nun der Annahme nach:

$$BC : AB = bc : ab$$
$$BC : AB = Bu : Bo$$
$$AC \# ou$$
$$BC : AC = Bu : ou \text{ (§. 271, 1.)}$$
$$BC : AC = bc : ac \text{ (der Annahme nach)}$$
$$Bu : ou = bc : ac$$
$$Bu : bc = ou : ac$$
$$Bu = bc \text{ (so gemacht)}$$
$$ou = ac$$
$$\triangle oBu \cong abc$$
$$\angle B = \angle b.$$

Ferner ist $\angle o = \angle a$ und
$\angle u = \angle c$, und

weil ou und AC gleichlaufend sind, so muss

$$\angle o = \angle A \text{ und } \angle u = \angle C \text{ sein,}$$
$$\angle A = \angle a \text{ und } \angle C = \angle c \text{ ist.}$$

§. 276. Das Auftragen eines Feldes. (Folgesätze.)

1) Es ist leicht, ein Feld in den Grund zu legen oder aufzunehmen, (im verjüngten Maaßstabe aufs Papier zu bringen), wenn man auf demselben nach

allen Richtungen gehen kann; man braucht es nämlich nur in Dreiekke zu zerlegen, und ähnliche Dreiekke aufs Papier zu tragen.

Es sei z. B. (Zeich. 110) das Feld **ABCDE** aufzunehmen, und dabei soll die Möglichkeit stattfinden, dass man auf dieser Fläche in allen Richtungen gehen kann. Man theilt das Fünfekk durch Striche (hier durch **AC** und **DC**) in 3 Dreiekke, misst alle Seiten der 3 Dreiekke und trägt sie im verjüngten Maaßstabe aufs Papier, so dass **abced** im verjüngten Maaßstabe auf dem Papier das würkliche Feld **ABCED** darstellt. Bei dem Auftragen der einzelnen Dreiekke muss man wohl darauf achten, dass sie alle 3 in die nämliche Lage im verjüngten Maaße kommen, die sie in der Würklichkeit haben.

Es gibt noch 2 andre Arten, die Flächen in den Grund zu legen, nämlich vermittelst des Messtischchens und vermittelst der künstlichen Winkelauftragung. Will man mit einem Messtischchen das Sechsekk **ABCDEF** (Zeich 111) aufnehmen, so wählt man sich, in der Mitte dieses Feldes, einen Punkt, von dem aus man nach allen Ekken hin sehen kann, hier x. Auf diesen Punkt setzt man das Messtischchen, stekkt an allen Ekken des Sechsekkes, also in **ABCDEF**, Stäbe, äugelt von x nach allen diesen Punkten und bezeichnet auf dem Papier die Richtungen mit Strichen. So erhält man um den Punkt x 6 Winkel. Darauf misst man die Entfernungen aller Ekken von x, also xA, xB, xC u. s. w., und trägt diese im verjüngten Maaßstabe auf das Papier, so dass

xa im verjüngten Maaßstabe xA darstellt,
xb — — — — xB,
xc — — — — xC u. s. w.

Die Punkte **abcdef** werden unter einander verbunden, und das Bild **abcdef** auf dem Papier muss dem Bilde **ABCDEF** auf dem Feld ähnlich, mithin letzteres rich-

tig aufgenommen sein. — Dass aber abcdef ähnlich ist ABCDEF, ergibt sich aus der Aehnlichkeit der einzelnen Theile; es muss nämlich

△ abx ∽ △ ABx △ bcx ∽ △ BCx △ cdx ∽ △ CDx △ dex ∽ △ DEx △ efx ∽ △ EFx △ fax ∽ △ FAx	weil der Winkel an x in beiden Dreiekken derselbe ist, und die ihn einschliessenden Schenkel im gleichen Verhältniss stehen. (§. 273.)

Aus dieser Aehnlichkeit ergibt sich, dass die Winkel am Umfang bei ABCDEF den ihnen entsprechenden Winkeln am Umfang bei abcdef gleich sein müssen. So ist ∠ABC = ∠abc; denn ABC ist ja ABx, und xBC und abc ja abx und xbc gleich; es ist aber ABx = abx und xBC = xbc. Gleichfalls folgt aus der Aehnlichkeit der entsprechenden Dreiekke die Verhältnissmäßigkeit der Umfangsseiten des Sechsekkes. Es muss z. B.

$$xb : xB = ab : AB$$
$$xc : xC = bc : BB \text{ u. s. w.}$$

Bedient man sich nicht des Messtischchens, sondern eines Feldwinkelmessers, so kann man denselben ebenfalls in die Mitte des Feldes ABCDEF setzen, nachdem man die Ekken durch Stäbe bezeichnet hat, und darauf alle Winkel messen, und durch einen Papierwinkelmesser auftragen. Mit den Seiten verfährt man so, wie bei dem Gebrauch des Messtischchens.

2) Soll man ein Feld aufnehmen, das im Innern nicht überall zugänglich ist, dessen Umfang aber von allen Seiten begangen werden kann; so misst man die Umfangsseiten und die Umfangswinkel, und trägt beide, d. h. erste im verjüngten Maaßstabe, auf das Papier. Sollte man z. B. (Zeich. 110) ABCED aufs Papier tragen, und wäre es nicht möglich, die Richtungen AC und DC im Innern zu messen; so messe man nach

einander alle Umfangsseiten und alle Winkel daran, und trage beide in gleicher Lage aufs Papier! Man fange z. B. mit B C an und stelle es auf dem Papier durch b c dar; darauf messe man den Winkel B und trage ihn an b an; darauf messe man A B und trage es im verjüngten Maaßstabe an b an u. s. w. Auf diese Art muss a b c e d ∽ A B C E D sein; denn es sind ja alle Winkel gleich und alle Seiten verhältnissmäßig gemacht; was die Bedingung der Aehnlichkeit zweier Flächen ist.

3) Soll man ein Feld auftragen, in dessen Inneres man nicht kommen kann, und dessen Aeußeres nicht überall zugänglich ist; so kann man zum Ziel gelangen, wenn nur 2 Ekken des Feldes zugänglich sind. — Es sei z. B. (Zeich. 112) A B C D E zu messen, und man soll nicht ins Innere dieses Feldes gehen können und auch verhindert sein, zwischen A B C zu messen, so dass man gezwungen ist, die ganze Auftragung von der Seite von E D vorzunehmen.

Man misst zuerst die Entfernung von E D, und trägt diese im verjüngten Maaßstabe aufs Papier, so dass E D dargestellt wird durch e d. Die Punkte A B C zeichnet man auf dem Felde durch Stangen aus, setzt darauf in E und in D nach einander den Feldwinkelmesser, und äugelt von beiden Punkten aus nach den 4 andern Punkten, um von E aus die Winkel I, U, O, und von D aus die Winkel R, S, T zu messen. Diese 6 Winkel trägt man in übereinstimmender Lage an die Punkte e und d auf dem Papier an, so dass $\angle o = \angle O$, $\angle u = \angle U$ u. s. w. sind. Die 6 freien Schenkel verlängert man so weit, bis sie sich in 6 Punkten durchschneiden, von denen man die 3 äußern, hier a b c, mit einander verbindet. Das Bild a b c d e, was man dadurch auf dem Papier erhält, muss dem A B C D E auf dem Felde ähnlich, und mithin letzteres richtig auf-

getragen sein. — Zum Beweise der Aehnlichkeit beider Flächen Folgendes: Aus der Winkelgleichmachung ergibt sich:

1) $\triangle$ a d e ∽ A D E
2) $\triangle$ e b d ∽ E B D
3) $\triangle$ e c d ∽ E C D
} 2 Winkel einzeln gleich 2 einzelnen Winkeln. (§. 270.)

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiekke ergeben sich folgende Verhältnisse:

1) $ed : ea = ED : EA$
2) $ed : eb = ED : EB$
$ed : db = ED : DB$
3) $ed : dc = ED : DC$

---

1) $ed : ED = ea : EA$
2) $ed : ED = eb : EB$
$ed : ED = db : DB$
3) $ed : ED = dc : DC$

Aus den 2 ersten Reihen folgt:

$ea : EA = eb : EB$

und aus den 2 letzten:

$db : DB = dc : DC.$

---

1) $ea : eb = EA : EB$, und
2) $db : dc = DB : DC.$

Erwägt man bei 1, daß $\angle o = \angle O$ ist, und bei 2, daß $\angle t = \angle T$ ist; so folgt:

1) $\triangle$ a b e ∽ A B E
2) $\triangle$ b c d ∽ B C D.
(§. 273.)

Hieraus folgt die Gleichheit der 3 nicht gleich gemachten Umfangswinkel; nämlich $\angle a = \angle A$ (wegen 1), $\angle c = \angle C$ (wegen 2), $\angle b = \angle B$, denn $z = Z$ (wegen 1), $w = W$ (wegen 2), $x = X$, weil $\triangle$ e b d ∽ $\triangle$ EBD ist.

Somit sind alle 5 Umfangswinkel in ABCDE einzeln so groß, als alle 5 Umfangswinkel in a b c d e einzeln. Die Verhältnißmäßigkeit der Seiten ist beiläufig mit erwiesen; denn wir hatten:

e d : E D = e a : E A,
e d : E D = d c : D C

e a : E A = d c : D C
d c : D C = c b : C B, (wegen Aehnlichkeit von △ dbc und DBC)

e a : E A = c b : C B
e a : E A = a b : A B, (wegen Aehnlichkeit von △ abe und ABE)
c b : C B = a b : A B.

§. 277. Beliebige Theilung eines Striches. (Folgeaufgabe.) Es ist (Zeich 115) der Strich OP gegeben, mit der Bedingung, ihn in 3, 4, 5, 6 u. s. w., hier ein Mal in 5, gleiche Theile zu theilen. Um dies zu thun, zieht man sich einen beliebigen Strich, hier BQ, und trägt auf diesen 5 gleiche beliebige Stükke, doch so, dass alle 5 zusammen, hier BG, länger sind als der zu theilende Strich. Ueber den Strich, der die 5 gleichen Theile enthält, hier über BG, beschreibt man ein gleichseitiges Dreiekk, hier ABG, und trägt darauf von A aus OP auf die beiden Seiten AB und AG, so dass sowohl AH als AN gleich OP sind. Die Punkte H und N werden durch einen Strich verbunden, so wie auch A mit C, D, E, F zu verbinden ist. Diese letzten Verbindungsstriche durchschneiden HN an 4 Stellen und theilen es in 5 gleiche Theile. Der Beweis dieses Satzes hat 2 Theile; denn es ist zuerst zu zeigen, dass HN gleich OP sei, und dann erst, dass HN in 5 gleiche Theile getheilt ist. Er lautet so:

A B : A G = A H : A N (denn sie sind gleich)
∠ A in △ A B G = ∠ A in △ A H N

△ A B G ∽ △ A H N (§. 273)

AB : B G = A H : H N
A B = B G

AH = H N
AH = O P (so gemacht)

H N = O P.

Daſs jeder Theil von HN = $\frac{1}{5}$ von O P läſſt ſich an jedem einzelnen Theile auf dieſelbe Art beweiſen; deshalb iſt es hinlänglich, den Beweis nur an einem Theil zu führen.

$$HN \# BG \quad (\S.\ 269)$$

$$HI \quad BC$$

$$\triangle HAI \backsim \triangle BAC \quad (\S.\ 267)$$

$$AB : BC = AH : HI$$
$$AB = BG$$
$$AH = HN$$

$$BG : BC = HN : HI$$
$$BC = \tfrac{1}{5} \text{ von } BG$$

$$HI = \tfrac{1}{5} \text{ von } HN.$$

Soll man einen gegebenen Strich nach einem gegebenen Verhältniſs theilen, und alſo nicht in gleiche, ſondern in verhältniſsmäßige Theile, ſo verfährt man weſentlich eben ſo. Soll man z. B. (Zeich. 116) den Strich CD in 3 Theile theilen, die ſich ſo zu einander verhalten, wie die 2 Theile von AB, nämlich AG, GF und FB, ſo trägt man CD auf EA und EB, ſo daſs jedes, EH und EL, = CD ſind, verbindet H und L und zieht von E aus die Striche EG und EF, ſo müſſen die 3 Theile HI, IK und KL in dem Verhältniſs ſich befinden, worin AG, GF und FB ſtehen. — Wäre der zu theilende Strich größer, als der gegebene, wäre z. B. ſtatt CD ein Strich gegeben, der AB an Größe überträfe, ſo müſſten die Seiten EB und EA an den Punkten B und A ſo weit verlängert werden, als der gegebene Strich es erfordert.

Es laſſen ſich beide Aufgaben noch auf eine andere Weiſe löſen, die äußerlich einfacher ſcheint, aber wegen des Zeichnens von mehrern gleichlaufenden Strichen in der Ausführung doch eher ſchwieriger als leichter iſt.

Man braucht nämlich nur an den zu theilenden Strich einen andern so zu setzen, dass sie beide einen Winkel bilden, und den andern Strich in der Art von beliebiger Länge machen, dass er verhältnissmäßig grade die Eintheilung hat, welche der gegebene Strich haben soll. Ist das geschehen, so werden beide Schenkelenden verbunden, und von den Theilungspunkten des Hülfsstriches gleichlaufend mit dem Strich, der beide Schenkelenden des Winkels verbunden hat, auf den zu theilenden Strich Striche gezogen, wodurch letzterer auf die geforderte Art getheilt wird, entweder in gleiche oder verhältnissmäßige Theile.

§. 278. Umgekehrtes Seiten-Verhältniss bei verbundenen Uebersehnen, oder schneidenden Sehnen. (Lehrsatz.)

1) Wenn von einem Punkte außerhalb eines Kreises 2 Striche in den Kreis so gezogen sind, dass sie den Umkreis an einer Stelle durchschneiden, und an einer andern Stelle mit ihren Enden berühren; so verhalten sie sich in Absicht ihrer Länge zu einander wie ihre umgekehrten Theile außerhalb des Kreises. Es sind (Zeich. 117) in den Kreis **VBSR** von dem Punkt **A** aus die Striche **AR** und **AS** so gezogen, dass sie den Umkreis in **V** und **B** durchschneiden und in **R** und **S** berühren; es muss deshalb **AR : AS = AB : AV**. — Zum Beweise verbinde man **V** mit **B** und **R** mit **S**, und es lässt sich darthun, dass $\triangle$ **ASR** $\sim$ **AVB**; denn $\angle$ **VBS** und $\angle$ **VRS** = 180 Grad, weil beide zusammen als Winkel im Umkreise auf einem ganzen Kreis stehen und mithin (nach §. 215) einen halben zum Maaß haben.

$\angle$ **VBS** $\angle$ **VBA** = 180 Grad,

$\angle$ **VRS** in $\triangle$ **ASR** = $\angle$ **VBA** in $\triangle$ **AVB**

$\angle$ **A** in $\triangle$ **ASR** = $\angle$ **A** in $\triangle$ **AVB**.

Hiermit ist die Aehnlichkeit der Dreiekke bewiesen; folglich muſs $AR : AS = AB : AV$; denn AS und AV stehen den als gleich bewiesenen Winkeln gegenüber.

2) Wenn 2 Sehnen in einem Kreise einander schneiden, so stehen ihre Theile in umgekehrtem Verhältniſs. — Zeich. 176 schneiden sich DB und CE; es muſs also:

$$OB : OE = OC : OD.$$

Zum Beweis verbinde man B mit C und D mit E, und man erhält zwei ähnliche Dreiekke; denn:

$\angle BOC = \angle EOD$ (Scheitelwinkel)

$\angle CBO = \angle DEO$ (stehen auf gleichen Kreisbogen)

$\triangle BCO \backsim \triangle EDO$ (§. 270.)

$$OB : OE = OC : OD.$$

§. 279. **Verhältniſs aller Umfangsseiten zu einer Seite oder zu einer Geere.** (Lehrsatz.) In 2 ähnlichen Flächen verhalten sich die gesammten Umfangsseiten in der einen Fläche zu den gesammten Umfangsseiten in der andern Fläche, wie 2 einzelne im Verhältniſs stehende Umfangsseiten, oder wie 2 im Verhältniſs stehende Geeren. Es müſsen z. B., da (Zeich. 112) $abcde \backsim ABCDE$ ist, $ab + bc + cd + de + ea : AB + BC + CD + DE + EA = ae : AE$.

Ferner: $ab + bc + cd + de + ea : AB + BC + CD + DE + EA = ec : EC$.

Der Beweis des ersten Satzes ist folgender:

$ab : AB = ab : AB$

$bc : BC = ab : AB$ (wegen der Aehnlichkeit.)

$cd : CD = ab : AB$

$de : DE = ab : AB$

$ae : AE = ab : AB$

$ab + bc + cd + de + ae : AB + BC + CD + DE + AE = 5 \times ab : 5 \times AB = ab : AB$ (§. 261, 7.)

Der Beweis für den andern Satz ergiebt sich sogleich aus dem Vorstehenden, wenn man sich davon überzeugt hat, daſs ec : EC = ab : AB, was keine Schwierigkeit macht.

§. 280. Die Umkreise verhalten sich wie die Durchmesser oder Halbmesser. (Folgerung.) Der Kreis wird wohl als ein unendlichseitiges Vielekk betrachtet, und der Umkreis als eine unendliche Menge von Umfangsseiten. Darum folgt aus dem vorigen Lehrsatz, daſs in ähnlichen Kreisen (und alle Kreise sind einander ähnlich) sich die Umkreise zu einander verhalten, wie die Durchmesser, welche man als Geeren aus gleichen Winkeln in unendlichseitigen Vielekken annimmt. Von selbst ergibt sich hieraus, daſs ähnliche Kreisbogen, d. h. solche Bogen von ungleichen Kreisen, die denselben Winkel umspannen, sich zu einander wie die Durchmesser oder wie die Halbmesser verhalten, oder auch wie ihre Sehnen.

§. 281. Umgekehrtes Verhältniſs von Grund und Höhe in gleichen, aber unähnlichen regelmäßigen Vierekken. (Lehrsatz.) Wenn zwei regelmäßige Vierekke (Parallelogramme) gleich sind, aber unähnlich, so müssen sich ihre Höhen, umgekehrt, wie ihre Grundrichtungen verhalten, und wenn letzteres der Fall ist, muſs auch ersteres sein, so daſs sich beide Sachen wechselseitig bedingen. Sind (Zeich. 177) die beiden Rechtekke ABDC und FDGE gleich, so müssen

AD : DE = FD : DC, und wenn

AD : DE = FD : DC, so müssen beide Rechtekke gleich sein.

Um das erste zu beweisen, rükke man beide Rechtekke so an einander, daſs die Höhen und Grundrichtungen von beiden in gleicher Richtung kommen, hier also AD mit DE und FD mit DC, und vollende darauf

das regelmäßige Viereck, was sich zwischen den 2 kürzern Seiten, hier zwischen AD und DF, machen lässt, nämlich HAFD. Ist das gethan, so ergibt sich Folgendes:

ABDC : HADF = DC : FD (§. 202)
FDEG : HADF = DE : AD (§. 202)
ABDC = FDEG

FDEG : HADF = DC : FD

DE : AD = DC : FD, oder
AD : DE = FD : DC

Findet aber zweitens dies Verhältniss statt, so müssen beide Flächen räumlich gleich sein; denn angenommen ist:
AD : DE = FD : DC.

Nun aber verhält sich
AD : DE = HADF : FDEG (§. 202)
FD : DC = HADF : ABDC (§. 202)

ABDC : HADF = FDEG : HADF (§. 262, 1)

ABDC : FDEG = HADF : HADF
HADF = HADF

ABDC = FDEG.

§. 282. Folgerungen aus §. 281.

1) Weil die Dreiekke die Hälften sind von regelmäßigen Viereckken, mit denen sie gleichen Grund und gleiche Höhe haben, und die Hälften in demselben Verhältniss sich befinden müssen, worin die Ganzen sind; so ist mit dem vorigen Beweis zugleich dargethan, dass in gleichen unähnlichen Dreiekken die Höhen sich umgekehrt wie die Grundrichtungen verhalten, und dass, wenn in 2 Dreiekken letzteres der Fall ist, sie gleich sein müssen.

2) Wenn 4 grade Striche im Verhältniss stehen, so ist das Rechtekk aus dem ersten und letzten gleich dem aus dem zweiten und dritten; denn bei diesen Rechtek-

ken werden Höhe und Grund in umgekehrtem Verhältniſs ſtehen.

3) Sind 4 Striche ſo beſchaffen, daſs das Rechtekk aus 1 und 4 gleich iſt dem von 2 und 3, ſo ſind ſie verhältniſsmäßig.

4) Drei Striche ſtehen im Verhältniſs, wenn das Rechtekk aus 1 und 3 gleich iſt dem Geviert aus 2.

§. 283. *Aehnliche regelmäßige Vierekke verhalten ſich zu einander, wie die Gevierte verhältniſsmäßiger Seiten.* (Lehrſatz.) Sind 2 regelmäßige Vierekke ſich unter einander ähnlich, ſo müſſen ſie ſich zu einander verhalten, wie die Gevierte ihrer gleichliegenden Seiten. Es ſei (Zeich. 178) $EFCD \backsim efcd$, ſo muſs:

$$EFCD : efcd = CD \times CD : cd \times cd,$$ oder
$$EFCD : efcd = FD \times FD : fd \times fd.$$

Wir wollen nur eins beweiſen, nämlich das erſte, und verwürklichen $CD \times CD$ in dem Geviert $ABCD$, und $cd \times cd$ in dem Geviert $abcd$.

$$EFCD : ABCD = FD : BD \quad (\S.\ 202)$$
$$BD = CD$$
$$\overline{}$$
$$EFCD : ABCD = FD : CD$$

Auf gleiche Art läſſt ſich beweiſen, daſs
$$efcd : abcd = fd : cd.$$

Wegen der Aehnlichkeit der beiden Rechtekke müſſen
$$FD : CD = fd : cd.$$

Aus dieſen 3 Gleichungen folgt (§. 262, 1):
$$EFCD : ABCD = efcd : abcd$$
$$\overline{}$$
$$EFCD : efcd = ABCD : abcd.$$

§. 284. *Folgerungen aus* §. 282.

1) Weil man alle Rauten und Schrägrauten in gleichräumige Rechtekke verwandeln kann, ſo iſt nicht erſt zu beweiſen, daſs von ihnen daſſelbe gilt, was hier nur an Rechtekken dargethan iſt.

2) Eben so leuchtet es von selbst ein, dass ähnliche Dreiekke sich zu einander verhalten, wie die Gevierte ihrer verhältnissmäßigen Seiten.

3) Jedes regelmäßige Geviert kann durch eine Geere in 2 gleiche Dreiekke zerlegt werden; zerlegt man 2 ähnliche Vierekke auf diese Art, so müssen sich die Dreiekke auch zu einander verhalten, wie die Gevierte der Geeren der Vierekke, weil diese Dreiekkes = Seiten sind. Das Verhältniss der Hälften kann von dem Verhältniss der Ganzen nicht abweichen; also müssen sich auch ähnliche Vierekke zu einander verhalten, wie die Gevierte ihrer verhältnissmäßigen Geeren.

4) Regelmäßige, ähnliche Vielekke müssen sich zu einander verhalten, wie die Gevierte einer Seite (denn alle sind gleich) oder wie die Gevierte einer Geere, oder wie die Gevierte der Strahlen oder der Durchmesser; denn letztere sind doppelte Strahlen und auch Geeren. Durch Zerfällung der Vielekke in Dreiekke lässt sich dies zeigen.

5) Zwei Kreise verhalten sich zu einander, wie die Gevierte ihrer Durchmesser, die als Geeren der Kreise (der unendlichen Vielekke) betrachtet werden.

Bemerkung. In dieser Uebung sind die drei ersten §§. aus der Zahllehre entlehnt, sie gehören aber eben so gut in die Raumlehre, als in die Zahllehre, weil die räumlichen Verhältnisse sich nach denselben Gesetzen richten, denen die zähligen und zeitigen unterworfen sind. Lehrer und Schüler werden an dieser Uebung sicher bemerken, dass der dritte Theil unserer Raumlehre schwieriger ist, als der zweite. Sollte ein Lehrer einsehn, dass er mit seinen Schülern nicht bis zum dritten Theil käme, so würde er wohlthun, das Auftragen im verjüngten Maaßstabe wenigstens zu nehmen, was in diesem Fall am besten sich an die Dekkung der Dreiekke anschlösse. Die Anfertigung verjüngter Maaßstäbe auf dem Papier nach dem Zehner= und Zwölfergesetz (Decimal= und Duodecimal = System) ist eine gute Uebung. Wichtiger bleibt aber immer das Auftragen ganzer Flächen. Es ist dies die beste Vorübung zur Erdkunde. Wie bedeutungsvoll

die Feldkunde (Terrain-Lehre) im Kriege ist, und wie man sich erst recht einzuorten (orientiren) weiß, wenn man Gegenden aufgetragen, daran erinnere ich bloß.

Zweite Uebung.

Körper.

§. 285. Verhältniss der Körper von gleicher Höhe und ähnlichem Grunde. (Folgerung.) Säulen und Spitzsäulen von gleicher Höhe und von ähnlichen Grundflächen verhalten sich wie die Gevierte der verhältnissmäßigen Seiten, oder der verhältnissmäßigen Geeren der Grundflächen; denn Säulen und Spitzsäulen von gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundflächen (§. 254); ähnliche Flächen aber verhalten sich wie die Gevierte von entsprechenden Seiten oder Geeren (§. 283 und §. 284). Da Rundsäulen unendlichkantige Säulen sind, und Kegel unendlichkantige Spitzsäulen; so müssen sich zwei von ihnen, wenn sie gleiche Höhe haben, zu einander verhalten, wie die Gevierte der Durchmesser ihrer Grundflächen.*)

§. 286. Verhältniss ähnlicher Körper. (Darlegung)

Alle ähnlichen Körper verhalten sich zu einander, wie die Würfel von ihren verhältnissmäßigen Seiten, Geeren oder andern Richtungen. Nehmen wir z. B. zwei regelmäßige vierseitige Säulen A und a an, und setzen wir den Fall, dass die Grundfläche von A 9 Zoll Länge und 6 Zoll Breite habe, die Höhe des Körpers aber 12 Zoll betrage, während an b alle diese Ausdehnungen nur $\frac{2}{3}$ Mal so groß sein, so sind diese Körper einander ähnlich und zwar verhalten sich die gleichliegenden Seiten

*) Dieser und der folgende §. lassen sich ausführlich an einzelnen Körpern erörtern; was hier unterblieben ist. Am besten sind dazu halb offene größere Körper, in die man die kleinern einschieben kann.

wie 3 zu 2. Es beträgt nämlich der Grund von A 9 × 6 Zoll, dies mit der Höhe vervielfältigt giebt 9 × 6 × 12 = 648 □□ Zoll; dagegen ist a nur 6 × 4 × 8 = 192 □□ Zoll groß. Das Verhältniſs von 648 zu 192 ist wie 27 zu 8, also in der That das Verhältniſs der Würfelzahlen von 3 und vierseitigen Säulen. Was hier an zwei regelmäßigen in einem einzigen Falle gezeigt ist, das bestättigt sich bei ähnlichen Säulen unter jeder andern Bedingung. Verhalten sich aber ähnliche Säulen wie die Würfelzahlen gleichliegender Seiten, Geeren rc. rc. zu einander, so muſs dies auch bei ähnlichen Spitzsäulen der Fall sein, da ja das Verhältniſs derselben zu den Säulen ein ganz festes ist. Wenn ferner alle übrigen ähnlichen Körper, sofern sie von ebenen Flächen begrenzt sind, sich wieder in ähnliche Spitzsäulen zerlegen lassen, wenn Walzen und Kegel wie Säulen und Spitzsäulen berechnet werden, und wenn endlich die Kugel als ein Vielflach von unendlicher Seitenzahl angesehen werden kann, so darf man mit Sicherheit annehmen, daſs alle ähnlichen Körper sich wie die Würfelzahlen verhältniſsmäßiger Richtungen verhalten.

Ein allgemeiner Beweis dafür ist noch folgender:

Der Inhalt einer Säule ist ein Erzeugniſs aus Grund und Höhe; es kommt also nur darauf an, zu erforschen, wie sich bei ähnlichen Säulen die Erzeugnisse aus Grund und Höhe verhalten. Bezeichnen wir zwei solche Körper durch A und a, ihre Grundflächen durch G und g, die Höhen durch H und h, und zwei gleichliegende Seiten an den Grundflächen durch S und s, so ist

$$A = G \times H$$

und $$a = g \times h,$$

ferner $$G : g = S^2 : s^2$$

und $$H : h = S : s$$

$$G \times H : g \times h = S^3 : s^3$$

oder $$A : a = S^3 : s^3.$$

§. 287. **Durchschneidung einer Spitzsäule.** (Lehrsatz.) Wird eine Spitzsäule durch eine Ebene gleichlaufend mit der Grundfläche durchschnitten, so muss die Schnittebene ähnlich der Grundfläche, und die abgeschnittene Spitzsäule ähnlich der ganzen durchschnittenen sein.

Es ist (Zeich. 118) die dreiseitige Spitzsäule APCZ gleichlaufend mit der Grund-Ebene PCZ in der Ebene BRM durchschnitten; so muss:

1) die Ebene BRM ∽ der Ebene PCZ, und

2) der Körper ABRM ∽ dem Körper APCZ sein.

Um das erste zu beweisen, braucht man nur darzuthun, dass die 3 Seiten des Dreieckes BRM mit den 3 Seiten des Dreieckes PCZ im Verhältniss stehen; und dieses ergibt sich daraus, dass BRM gleichlaufend mit PCZ liegt; also:

$$BR \ddagger PC$$
$$RM \ddagger CZ$$
$$MB \ddagger ZP.$$

Es verhält sich also:

$$AR : AC = RM : CZ, \text{ und}$$
$$AR : AC = RB : CP$$
$$\overline{RM : CZ = RB : CP}$$
$$\overline{RM : RB = CZ : CP.}$$

Ferner verhält sich:

$$AM : AZ = MB : ZP, \text{ und}$$
$$AM : AZ = MR : ZC$$
$$\overline{MB : ZP = MR : ZC}$$
$$\overline{MB : MR = ZP : ZC.}$$

Endlich verhält sich:

$$AB : AP = BR : PC, \text{ und}$$
$$AB : AP = BM : PZ$$
$$\overline{BR : PC = BM : PZ}$$
$$\overline{BR : BM = PC : PZ.}$$

Es sind also folgende Verhältnisse ermittelt:

$$RM : RB = CZ : CP$$
$$RB : BM = CP : PZ$$
$$MB : RM = PZ : CZ$$

mithin muss $\triangle$ BRM ∽ $\triangle$ PCZ. (§. 275.)

So wie die Grundflächen ähnlich sind, so müssen auch die Seitenflächen ähnlich sein, weil 3 Winkel einzeln in den Seiten-Dreiekken der kleinern Spitzsäule drei einzelnen Winkeln in den Seiten-Dreiekken der größern Spitzsäule gleich sind, nämlich der eine an A ist in beiden Körpern derselbe, und die andern, z. B. B = P und R = C, sind wegen des Gleichlaufs der Seiten am Grunde gleich. Sind aber an zwei Körpern alle Flächen in übereinstimmenden Lagen ähnlich, so müssen sie unter einander ähnlich sein. Von selbst folgt, dass, wenn 2 Spitzsäulen gleiche Höhen haben und man sie gleichlaufend mit den Grundflächen in gleichem Abstande von denselben durchschneidet, die Schnittflächen sich verhalten, wie die Grundflächen.

Das, was hier an einer dreiseitigen Spitzsäule bewiesen ist, muss sich auch an allen Spitzsäulen bewähren, da sie ja können in dreiseitige zerlegt werden. Auch auf den Kegel ist dieser Satz auszudehnen, da er ja eine Spitzsäule von unendlich vielen Seiten ist.

§. 288. Eine Kugel, eine Masse von Walzen. (Veranschaulichung.) Legt man viele kleine Walzen, wovon die folgende um ein Unmerkliches kleiner ist, als die vorhergehende, z. B. eine Menge Kreise, die aus Papier geschnitten und also würklich körperliche Walzen sind, so auf einander, dass die letzte Walze zuletzt einen einzigen Punkt ausmacht; so erhält man dadurch einen Körper, der, wenn er auch nicht genau ein Kegel oder eine Halbkugel ist, doch einem von diesen Körpern sehr nahe kommt. Oder zerschneidet man einen Kegel oder eine Halbkugel gleichlaufend mit dem Grundkreise in unendliche Menge von Körpern, so werden alle einzelnen Körper Walzen von unendlich kleiner Höhe gleichen, wenn auch nicht würklich sein. Es ist darum zulässig, sowohl die Halbkugel als den Kegel als eine Aufeinanderhäufung von unendlich vielen Walzen zu betrachten,

deren Höhe unermesslich klein ist, und wovon die unterliegende um einen unendlich geringern Theil breiter ist, als die aufliegende.

§. 289. **Die Halbkugel 2 Drittel von einer gleich hohen und gleich breiten Walze.** (Lehrsatz.) Eine Halbkugel beträgt 2 Drittel körperlichen Inhalt von einer Walze, deren Grund der Kreisfläche der Halbkugel, und deren Höhe dem Halbmesser, also der Höhe der auf der Kreisfläche ruhenden Halbkugel entspricht.

Es stelle (Zeich. 119) **ANCFBE** eine Walze, **ENFB** eine Halbkugel und **ABCN** einen Kegel vor, welche 3 Körper in einander stekkend, der Kegel verkehrt, gleichen Grund und gleiche Höhe haben. Der gemeinschaftliche Grund wird von der obern und untern Kreisfläche gebildet, welche gleich sind, und **A C** wie **E F** zum Durchmesser haben. Die gemeinschaftliche Höhe ist **BN**.

Schneiden wir jetzt aus allen drei in einander stekkenden Körpern, gleichlaufend mit den gemeinsamen Grundflächen, Scheiben von unendlicher Dünne heraus, so können wir versichert sein, dass sich alle 3 Körper zu einander verhalten müssen, wie diese Scheiben, da wir ja alle drei Körper, wegen gleicher Höhe, in gleichviele solcher Scheiben zerlegen können. **Z S** stellt diesen ganzen Schnitt dar, **PS** nur die Hälfte. Bei dieser bleiben wir stehen, da die Ganzen in demselben Verhältniss stehen müssen, worin sich die Hälften befinden. **PS** ist der Halbmesser der Walze, die aus der großen Walze geschnitten ist, **PG** der Halbmesser der Walze, die aus der Halbkugel geschnitten ist, und **P Q** der Halbmesser der Walze, welche aus dem Kegel geschnitten ward.

Man ziehe den Hülfsstrich **BG**! So ist:

$PS = BF$ (wegen des Gleichlaufs)

$BF = BG$ (Strahlen)

$\overline{PS = BG}$

$\overline{PS^2 = BG^2}$.

Ferner; $BN : NC = BP : PQ$ (weil $PQ \# NC$)
$BN = NC$
$\overline{BP = PQ}$
$\overline{BP^2 = PQ^2}$

Endlich muſs
$BG^2 = BP^2 + PG^2$ sein. (§. 211.)
$BG^2 = PS^2$
$BP^2 = PQ^2$ (wie vorher gezeigt)
$\overline{PS^2 = PQ^2 + PG^2}$.

Das, was jetzt von den Walzen PS, PG und PQ bewiesen ist, das muſs auch von den Walzen Z S, S G und W Q gelten. — Da nun aber an allen Stellen dasselbe Verhältniſs sich ereignen wird, man mag die in einander gestekkten 3 Körper durchschneiden, wo man will, wenn es nur gleichlaufend mit dem Grunde geschieht; so ergibt sich, indem Walzen von gleicher Höhe sich zu einander verhalten, wie die Gevierte ihrer Halbmesser, daſs ein Kegel und eine Halbkugel zusammen genommen so groß sind, als eine Walze, mit der sie beide gleichen Grund und gleiche Höhe haben. Weil aber ein Kegel 1 Drittel von einer Walze ist, mit der sie gleichen Grund und gleiche Höhe hat, so muſs nothwendig die Halbkugel 2 Drittel von einer solchen Walze sein.

Weil man von den Hälften auf die Ganzen schließen kann: so ist **eine Kugel zwei Drittel von der Walze, deren Höhe und Grund-Durchmesser der Kugelaxe gleichen.**

§. 290. **Verhältniſs des Kugelinhaltes zum Würfelinhalt der Kugelaxe.** (Lehrsatz.) Es verhält sich der körperliche Inhalt der Kugel zu dem Würfelinhalt ihrer Axe, wie 157 : 300, und man kann also aus dem einen das andere errechnen.

Der Beweis dieses Satzes ist im Wesentlichen schon früherhin (§. 257) dadurch gegeben, daſs gezeigt wurde,

dass der körperliche Inhalt einer Kugel dadurch erhalten werde, dass man das Geviert ihrer Axe mit dem Umfang vervielfältige, und das Ergebniss durch 6 theile. Beträgt z. B. die Axe einer Kugel 100 Zoll, so muss der Würfelinhalt $\frac{100 \times 100 \times 314}{6}$ sein, d. i. $523333\frac{1}{3}$ □ □ Zoll.

Der Inhalt eines Würfels, dessen eine Seite 100 hat, beträgt $100 \times 100 \times 100$, d. i. 1000000 □ □ Zoll. Eine Kugel, die 100 Zoll in der Axe hat, verhält sich also zum Würfel, dessen eine Seite 100 Zoll beträgt, wie $523333\frac{1}{3} : 1000000$. Nennen wir die Kugel k und den Durchmesser d, so ergibt sich:

$$k : d^3 = 523333\tfrac{1}{3} : 1000000$$

$$k : d^3 = 523333\tfrac{1}{3} \times 3 : 1000000 \times 3$$

d. i. $k : d^3 = 1570000 : 3000000$

$$k : d^3 = \frac{1570000}{10000} : \frac{3000000}{10000}$$

d i. $k : d^3 = 157 : 300.$

Nehmen wir eine Kugel von größerer oder kleinerer Axe an, so muss das Verhältniss immer dasselbe bleiben, was jeder Versuch zeigen kann.

Es muss das Verhältniss dasselbe bleiben, weil ja Kugel und Würfel ebenmäßig mit der Vergrößerung des Durchmessers wachsen, mit seiner Verkleinerung abnehmen.

§. 201. Folgerungen aus §. 290.

1) Da sich das Verhältniss auch umdrehen lässt, so kann man aus der Axe einer Kugel durch jenes Verhältniss den Inhalt der Kugel errechnen. Beträgt z. B. die Axe einer Kugel 25 Zoll, so muss der Würfelinhalt der Kugel $8177\frac{1}{12}$ betragen, was auf folgende Weise errechnet ist:

$300 : 157 = 25^3 : x$ (Inhalt der Kugel)

$25^3 = 15625$
157

109375
78125
15625
---
300 | 2453125 | $8177\frac{1}{12}$ □ □
2400

531
300

2310
2100

2125
2100
---
25 | 25
300 | $\frac{1}{12}$

2) Durch das angegebene Verhältniſs kann man auch aus dem Inhalt der Kugel ihre Axe errechnen; denn man schlieſst: wie sich verhält 157 zu 300, so verhält sich der gegebene Würfelinhalt der Kugel zu der Axe im Würfel; rechnet die vierte Gröſse aus den drei gegebenen aus, und verwandelt den Würfelinhalt der Axe in die bloſse Axe, welche Verwandlung die höhere Rechenkunst lehrt.*)

3) Alle Kugeln verhalten sich zu einander, wie die Würfel ihrer Axen. Wem dies aus dem Vorigen noch nicht genug erhellen sollte, der mache folgende Gleichungen (k = kleine Kugel, K = groſse Kugel, a = kleine, A = groſse Axe):

$$k : a^3 = 157 : 300$$
$$K : A^3 = 157 : 300$$
$$k : a^3 = K : A^3$$
$$k : K = a^3 : A^3.$$

*) Ueberall werden wir hier schon im Fortschreiten gehemmt, weil wir die höhere Rechenkunst nicht voraussetzen, und die schwierigen Aufgaben der Raumlehre nur durch Hülfe dieser gelöst werden können.

Ist z. B. die Axe von K 4 Mal so groß als die von k, so muss K sich zu k wie 64 zu 1 verhalten, oder der Inhalt von K ist 64 Mal so groß, als der von k.

§. 292. Berechnung der Langrunde und Eirunde. (Erklärung.) Die Eirunde (Ovale) und Langrunde lassen sich nicht so genau berechnen, als die Kugeln, weil ihre Zurundungen und Abrundungen nicht denselben Gesetzen unterworfen sind. Eine ungefähre Berechnung gibt die Annahme, dass ein Langrund 2 Drittel von einer Walze sei, deren Höhe der langen Axe des Langrundes, und deren Grunddurchmesser der kurzen Axe des Langrundes gleicht. Eine ähnliche Annahme kann bei dem Eirund stattfinden. Nämlich ein Eirund ist ungefähr 2 Drittel von einer Walze, deren Höhe der Länge des Eirundes, und deren Grunddurchmesser dem Striche gleicht, der im Mitten die lange Axe des Eirundes in rechten Winkeln schneidet.

§. 293. Berechnung des Inhalts von unregelmäßigen Körpern. (Erklärung.) Alle von ebenen Flächen begränzten Körper lassen sich in dreiseitige Spitzsäulen zerlegen, wie alle gradstrichigen Ebenen in Dreiecke, und berechnet man den Inhalt der einzelnen dreiseitigen Spitzsäule, und nimmt den Betrag aller zusammen, so hat man den Inhalt des ganzen Körpers. Allein diese Umständlichkeit ist nicht erst nöthig; denn es gibt einen einfachern Weg, den Würfelinhalt von allen unregelmäßigen Körpern, sie mögen von ebnen oder gebognen Flächen begränzt sein, auszumessen; selbst ganze Bäume und die verworrensten Dinge. Man stellt nämlich einen solchen zu messenden Gegenstand in ein Gefäß, welches denselben ganz fassen kann, und dessen Würfelinhalt man kennt. Alle Räume, die das Ding in dem Gefäß noch leer lässt, werden mit einer andern Masse angefüllt, z. B. mit Sand oder mit Wasser. Ist das Gefäß ganz voll, so weiß man, dass der zu messende Gegenstand nebst der Hülfsmasse so viel Inhalt hat, als das Gefäß. Dar-

auf misst man die Hülfsmasse aus, und rechnet den Betrag derselben von dem ersten Betrag ab; so muss das Uebrigbleibende den Inhalt des zu messenden unregelmäßigen Gegenstandes geben.

§. 294. Gewöhnliche Körpermaaße. (Erklärung.) Man berechnet den Inhalt sehr vieler Dinge nicht nach dem Würfel, sondern nach andern Maaßen; z. B. die Kornmaaße sind in der Regel Walzen, als Scheffel, Viertel, Metzen. Flüssige Dinge werden nach Flaschen (Kannen, Quarten) und Tonnen (Fässern) berechnet, deren Größe nicht in allen Ländern gleich ist.

§. 295. Fassmesser. (Erklärung.) Zur Untersuchung des Inhaltes von Fässern hat man eigne Maaßstäbe, Fassmesser oder Visirstäbe genannt. Es gibt zwei Arten solcher Fassmesser, nämlich den walzigen (cylindrischen) und würfligen (cubischen). Wir geben hier nur den ersten an, weil sich der zweite auf für uns zu schwere Sätze und Rechnungen gründet, dazu auch nicht überall angewandt werden kann.

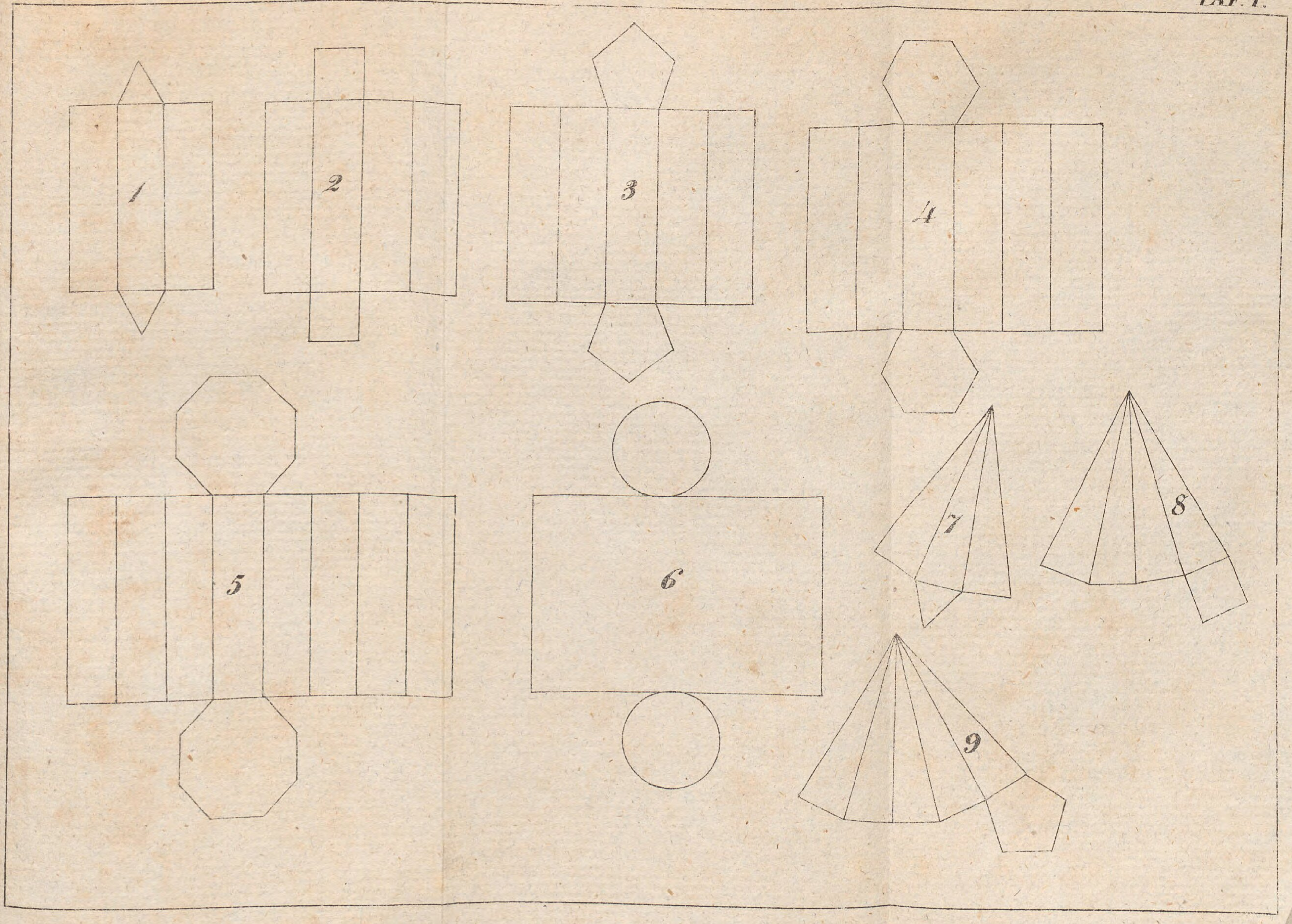
Will man sich einen walzigen Fassmesser machen, so verschafft man sich das örtliche Kannenmaaß in Walzenform, misst daran den Durchmesser des Bodens und trägt die Länge desselben auf beide Schenkel eines rechten Winkels, hier (Zeich. 120) auf **AR** und **AB**, so dass jedes einzeln den Durchmesser des Bodens von dem gewählten Kannenmaaß gibt. Verbindet man **B** mit **R**, so muss **BR** den Bodendurchmesser eines Kannengefäßes enthalten, das mit dem gewählten gleiche Höhe, aber noch ein Mal so viel Inhalt hat; denn $A^2 : RB^2 = 1 : 2$, und Walzen von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie die Gevierte ihrer Grunddurchmesser. Tragen wir **RB** auf **A B**, und machen wir **C A** = **R B**, so muss auch **C A** der Grunddurchmesser einer Kanne sein, die mit der angenommenen gleiche Höhe und doppelten Inhalt hat. Verbindet man **R C**, so muss dieser Strich der Grunddurchmesser einer Kanne sein, die mit der ge-

nommenen gleiche Höhe, aber einen 3 Mal so starken Inhalt hat. Dasselbe gilt von AD, wenn wir es gleich CR machen. Ziehen wir RD und machen ihm gleich AE, so muss ersteres und letzteres den Durchmesser einer Kanne enthalten, die mit der angenommenen gleiche Höhe, aber einen 4 Mal so großen Inhalt hat. Fahren wir so fort, Geeren zu ziehen und die Geerenseiten auf den verlängerten Strich AB zu tragen, so können wir uns einen Maaßstab von beliebiger Ausdehnung verschaffen. Wir haben ihn in unserer Zeichnung nur bis 6 ausgedehnt. Ritzt man den so erhaltenen Maaßstab auf die eine Seite eines Stäbchens ein, und setzt auf die andere Seite desselben die Höhen des Kantenmaaßes, so wie sie in der Würklichkeit sind, von 1 an in beliebiger Ausdehnung, so ist der Fassmesser fertig. Will man nämlich wissen, wie viel Kannenmaaße ein vorliegendes Fass enthält, so misst man mit der Durchmesserleiter, die wir zuerst angaben, den Durchmesser des Fassbodens, was äußerlich geschehen kann, und den Durchmesser des Fassbauches, indem man ins Spundloch den Fassmesser stekkt. Beide Durchmesser vereint man und nimmt von dem Betrage die Hälfte, um so den mittlern Durchmesser der Fassdicke zu bekommen, weil bekanntlich ein Fass keine genaue Walze ist. Findet man nach dieser Ausgleichung z. B., der Fassdurchmesser beträgt 15 auf den Fassmesser, so weiß man, dass 15 Kannenmaaße neben einander würden in der Fasswalze stehen können. Darauf misst man mit der zweiten Leiter des Fassmessers die Länge des Fasses, und findet man, dass sie 6 beträgt, so können die 15 Kannen 6 Mal auf einander gestellt werden, folglich muss der Würfelinhalt $15 \times 6 = 90$ Kannen betragen.

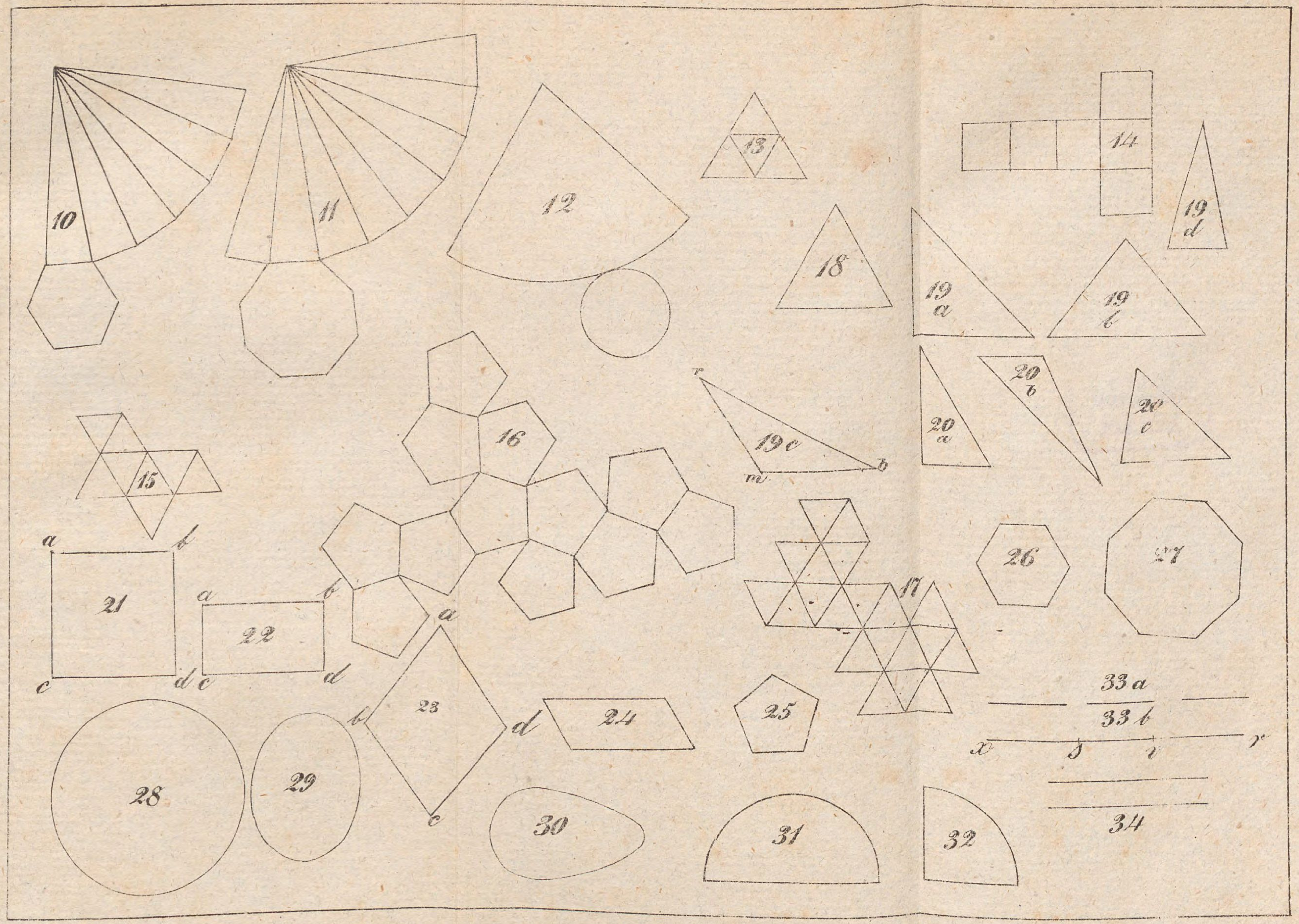
Bemerkung. Keiner, der bis hierher kommt, wähne, er habe sich schon der ganzen Raumlehre bemächtigt. Wir brechen hier ab, weil wir nur ein Lehrbuch für die Volksschulen, Bürgerschulen und niedere Klassen der gelehrten Schulen liefern wollten, und darum nicht zu weit gehen dürfen, wenigstens nicht weiter, als es die gewöhnliche Zahllehre erlaubt. Der dritte Theil ist schon etwas lükkenhaft, weil wir hie und da zu gelehrten Erörterungen ausweichen mussten. In wem durch diesen Leitfaden Lust und Liebe zum Weiterforschen angeregt ist, der suche sich nun einen andern Führer. Es sind in den Vorreden deren genug erwähnt.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

TAF. I.

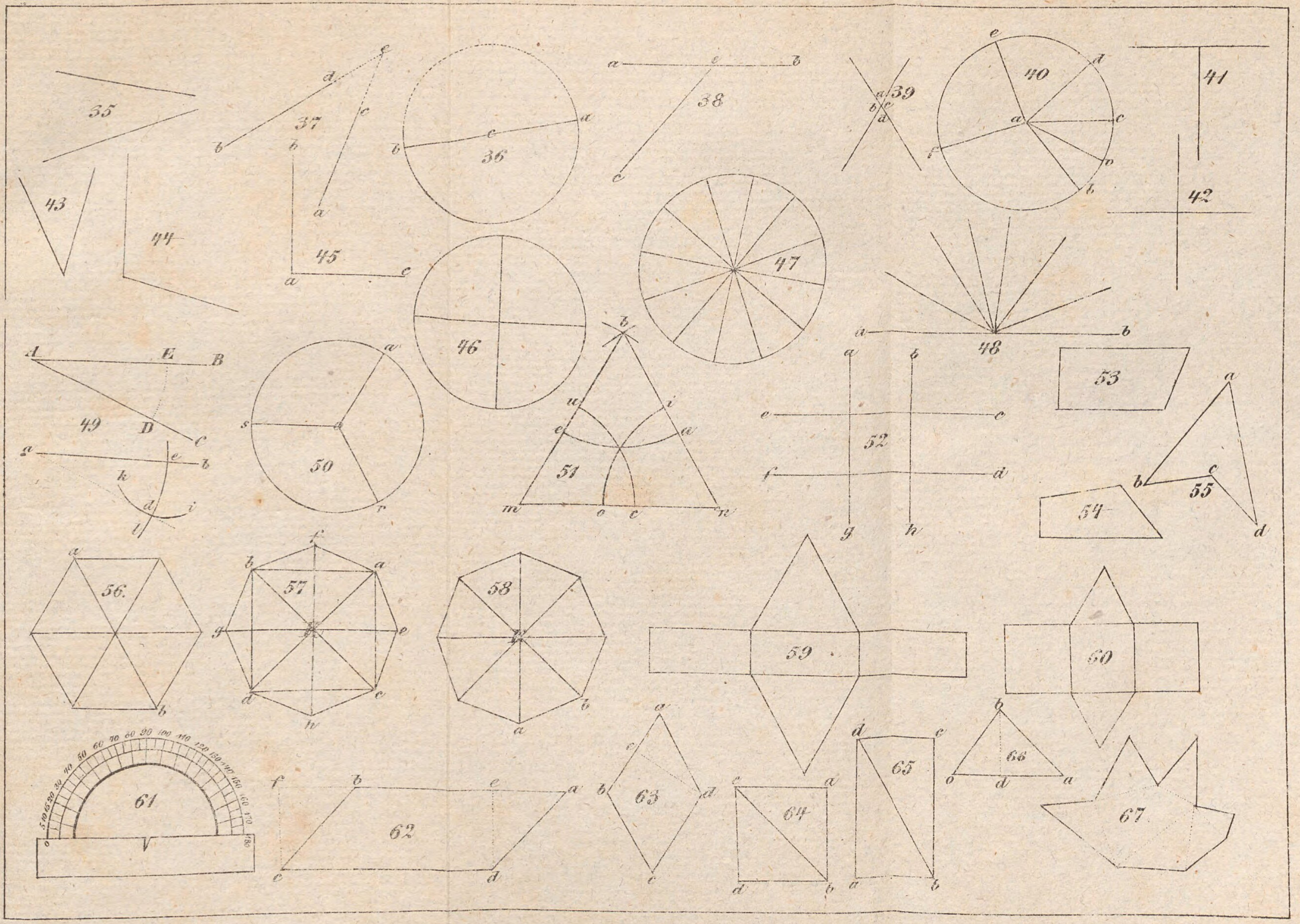


TAF. II.



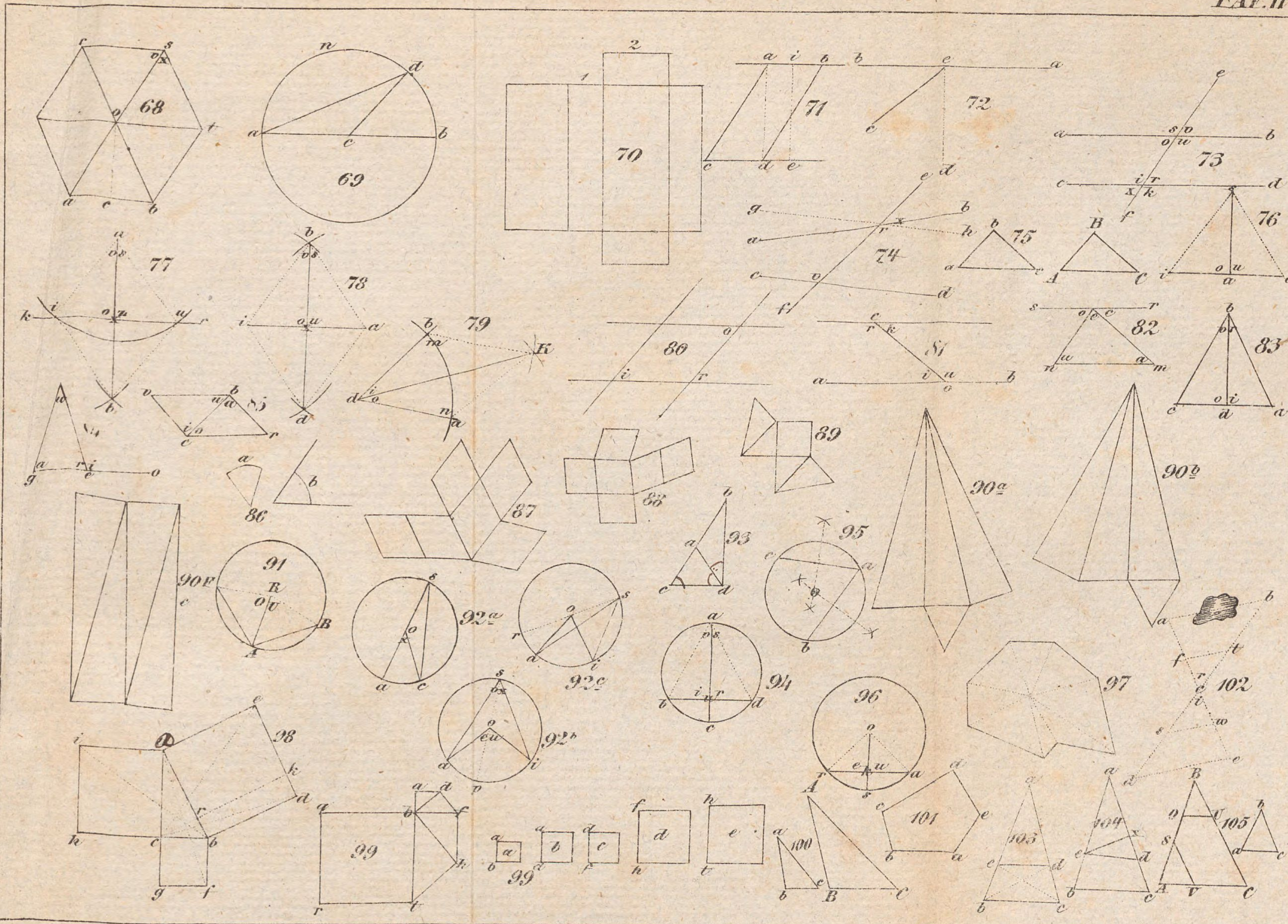
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19 a
19 b
19 c
r
m
b
19 d
20 a
20 b
20 c
21
a
b
c
d
22
a
b
c
d
23
a
b
c
d
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33 a
33 b
x
s
i
r
34

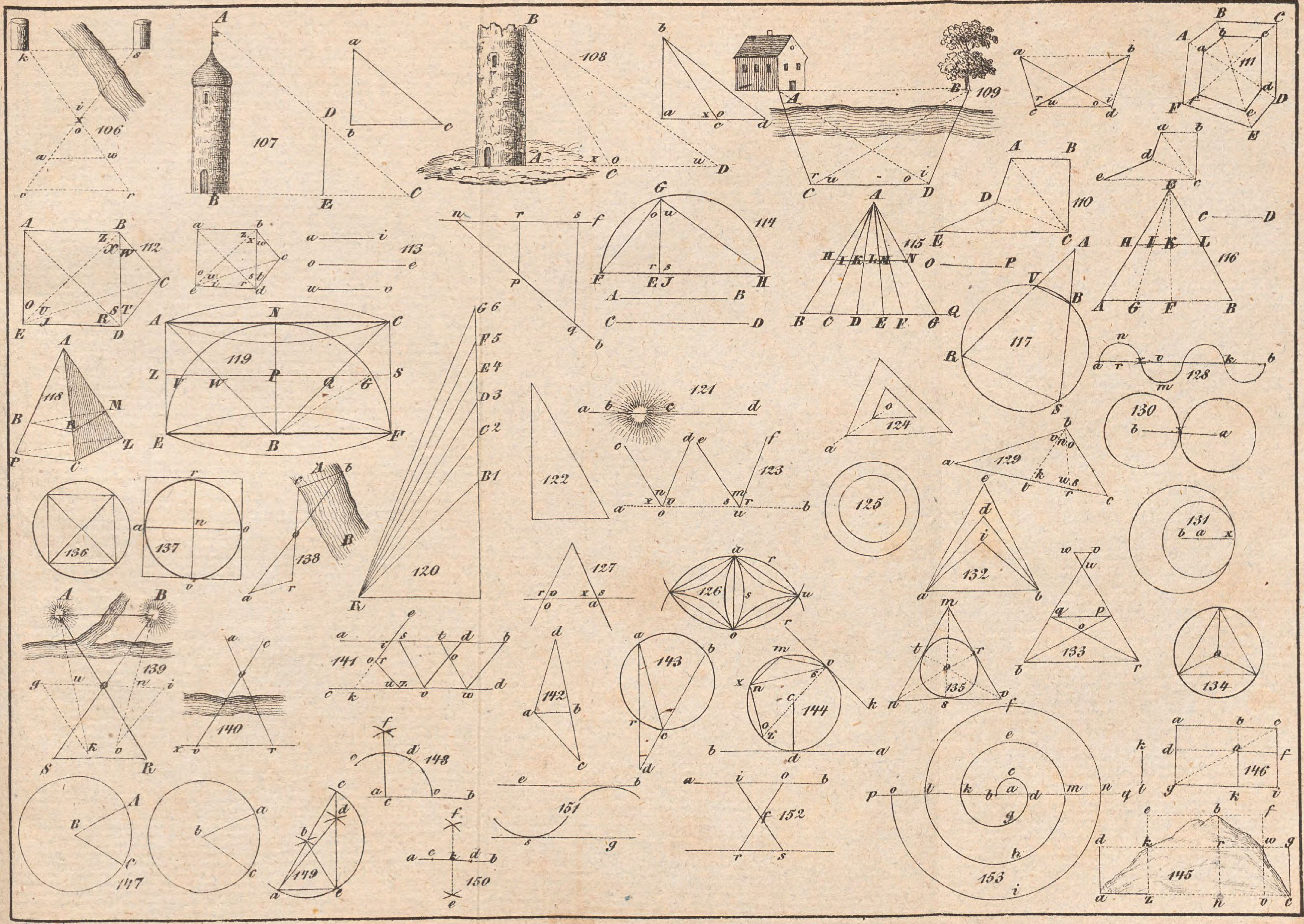
TAF. III.

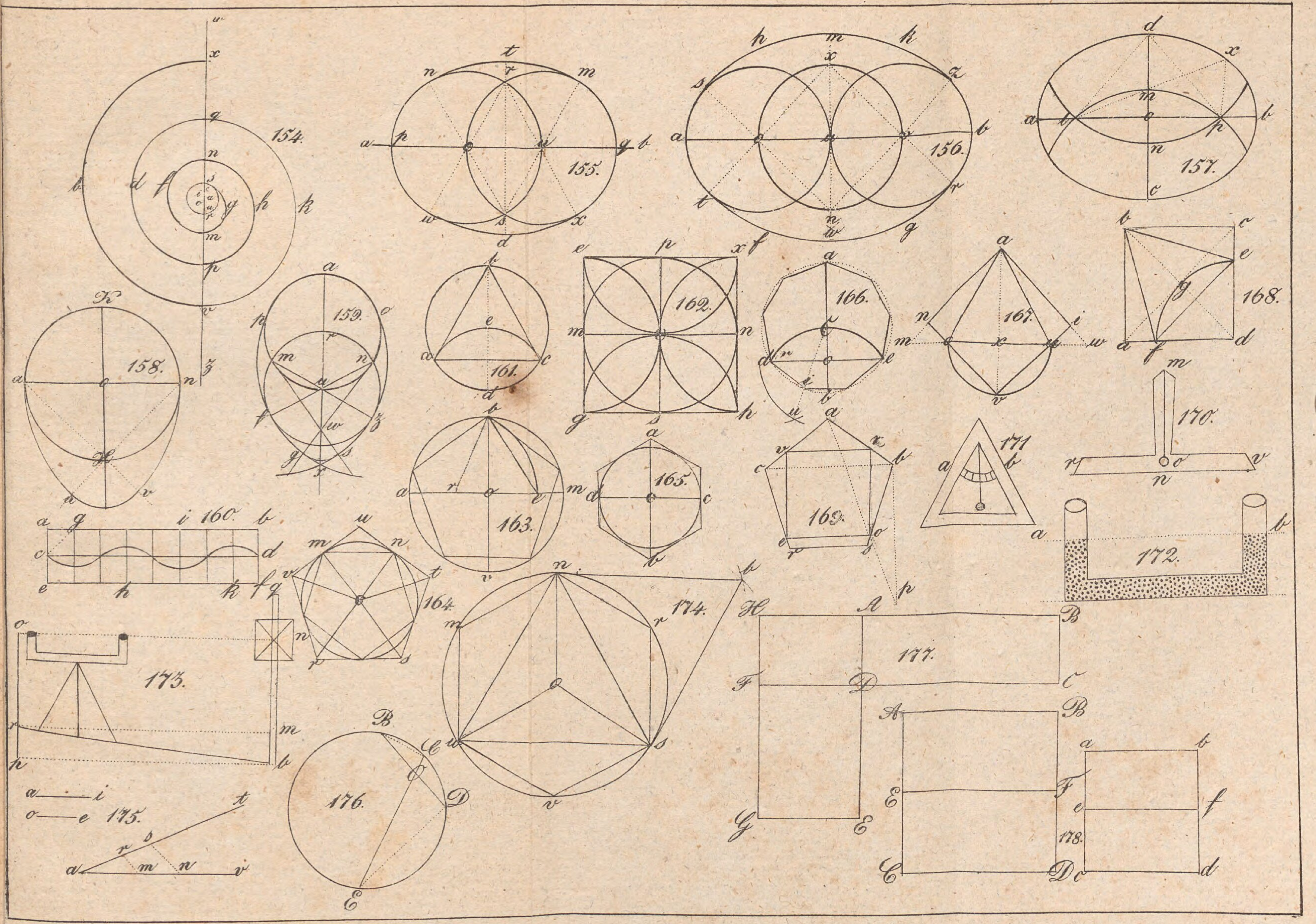


35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56.
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67

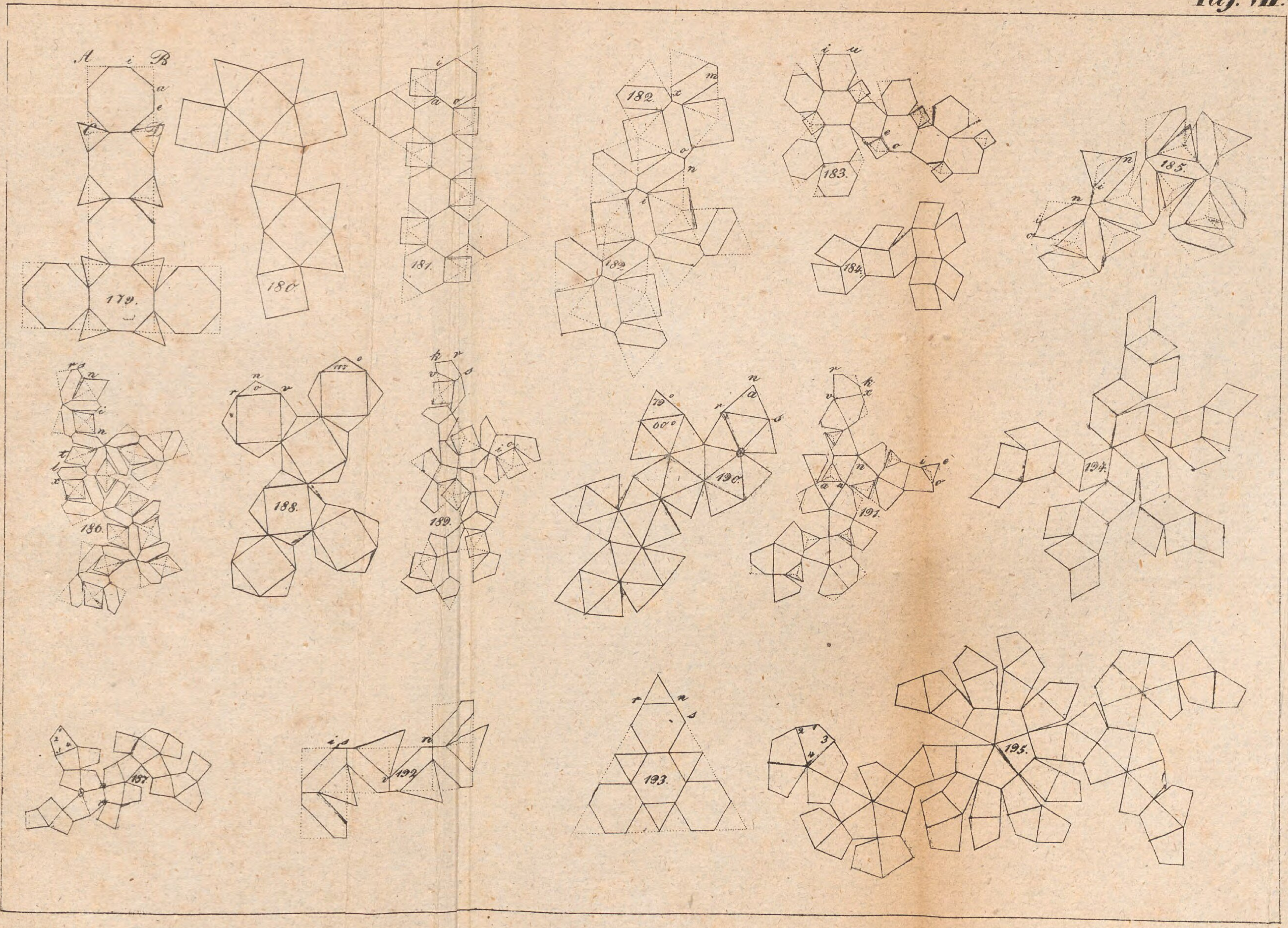
TAF. IV.


68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90ª
90ᵇ
90F
91
92ª
92ᵇ
92ᶜ
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105


106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153


154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.
165.
166.
167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.

Taf. VII.


179.
180.
181.
182.
183.
184.
185.
186.
187.
188.
189.
190.
191.
192.
193.
194.
195.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Harnisch, Wilhelm,

Die Raumlehre oder die Messkunst, gewöhnlich Geometrie genannt mit gleichseitiger Beachtung von Wissenschaft und Leben ; Für Lehrer u. Lerner bearb

Breslau 1837

Math.p. 739 w
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083273-6